ELETTROMAGNETISMO
PARTE I - ELETTRICITÀ

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

1. La Legge di Coulomb

Esercizio 1. L'elettrone e il protone in un atomo di idrogeno si trovano a una distanza media $r = 0.53 \cdot 10^{-10}\, m$. che coincide con le dimensioni dell'atomo. Calcolare l'intensità della forza gravitazionale e della forza elettrica tra il protone e l'elettrone.

Soluzione. Applicando la relazione che descrive la forza coulombiana, si ha

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(1.60 \cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(0.53 \cdot 10^{-10}\right)^2} = 8.20 \cdot 10^{-8} N$$

mentre

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{\left(0.53 \cdot 10^{-10}\right)^2} = 3.61 \cdot 10^{-47} N$$

Il rapporto tra le due forze $F_e/F_g \cong 2.3 \cdot 10^{39}$ evidenzia che a livello atomico la forza gravitazionale è completamente trascurabile rispetto alla forza elettrica. Si deve a quest'ultima la formazione e la stabilità degli atomi e quindi della materia.

Esercizio 2. Un uomo di massa $m = 70\, kg$, isolato da terra, possiede una carica $-q$ che, per queste considerazioni, pensiamo concentrata in un punto a distanza $r = 1\, m$ dal suolo. Sul suolo è posta una carica q, a distanza r da $-q$. Calcolare il valore di q per cui la forza elettrica tra le cariche è pari al peso dell'uomo.

Soluzione. Se la forza elettrica è pari al peso dell'uomo, sarà

$$mg = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

da cui, risolvendo rispetto a q, si ha

$$q = \sqrt{mg 4\pi\varepsilon_0 r^2} = \sqrt{70 \cdot 9.8 \cdot \left(9 \cdot 10^9\right)^{-1} \cdot 1} = 2.76 \cdot 10^{-4}\, C$$

Poiché la carica negativa è portata dagli elettroni, vuol dire che l'uomo ha sul suo corpo un eccesso di elettroni. Calcoliamo il numero di elettroni

$$N = \frac{q}{e} = \frac{2.76 \cdot 10^{-4}}{1.60 \cdot 10^{-19}} = 1.73 \cdot 10^{15}\, elettroni$$

questi hanno la massa $Nm_e = 1.58 \cdot 10^{-15}\, kg$, del tutto trascurabile rispetto alla massa dell'uomo! L'esempio, che è volutamente paradossale, indica che se i corpi non fossero neutri, ma possedessero cariche anche piuttosto piccole, la forza elettrica maschererebbe completamente la forza gravitazionale. Del resto la forza gravitazionale, alla quale si deve la formazione delle galassie, delle stelle e dei pianeti, ha potuto manifestarsi nella storia dell'universo solamente dopo che la forza elettrica aveva terminato la sua opera e cioè aveva formato gli atomi neutri partendo dai protoni, neutroni ed elettroni, costituenti elementari della materia stabile.

Esercizio 3. Una sferetta conduttrice molto leggera, di massa $m = 2 \cdot 10^{-3} kg$, possiede una carica $q_0 = 2 \cdot 10^{-8}\, C$ ed è sospesa ad un filo lungo l. Una seconda sferetta conduttrice con una carica $q = 5 \cdot 10^{-7}\, C$ viene avvicinata a q_0. Quando la distanza tra i centri di q e q_0 vale $r = 5\, cm$ l'angolo che il filo forma con la verticale vale θ. Calcolare θ.

Soluzione. All'equilibrio abbiamo la situazione indicata in figura: la risultante $\mathbf{R}$ della forza peso e della forza elettrica agenti su q_0 è diretta lungo il filo, bilanciata dalla tensione del filo stesso. Quindi, applicando i teoremi sui triangoli rettangoli, si ha

$$\tan\theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2 mg} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{25 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8} = 0.1837$$

da cui

$$\theta = \arctan 0.1837 \cong 10.41^\circ$$

con con l'approssimazione $\theta \cong \tan\theta$ risulta $\theta \cong 10.53°$. Pertanto, finché l'angolo è piuttosto piccolo, diciamo inferiore a $10° = 0.1745\,rad$, possiamo scrivere

$$\theta = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2 mg}$$

in cui l'angolo è espresso in radianti.

Esercizio 4. Durante la scarica a terra di un fulmine scorre una corrente di $2.5 \cdot 10^4\,A$ per un tempo di $20\,\mu s$. Trovare la carica che viene trasferita in tale evento

Soluzione 5. la corrente è il rapporto tra la quantità di carica che fluisce nell'intervallo di tempo stabilito (sec)

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

da cui

$$\Delta Q = i\Delta t = 2.5 \cdot 10^4\,\frac{Coul}{s} \times 20 \cdot 10^{-6}s = 0.50\,C$$

Esercizio 6. Trovare la forza elettrostatica fra due cariche di $1.00\,C$ alla distanza di $1.00\,m$ e di $1\,km$, supposta possibile una tale configurazione..

Soluzione. la forza che ogni carica esercita sull'altra è espressa dalla legge di Coulomb:

$$F_e = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

dove $k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}$ con ε_0, costante dielettrica del vuoto (e supporremo che le cariche siano nel vuoto), q_1, q_2 sono le cariche e r la distanza che le separa; pertanto, sostituendo i valori assegnati si ha

$$F = 8.99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{1.00^2\,C^2}{1.00^2\,m^2} = 8.99 \cdot 10^9\,N$$

per una distanza di $1.00\,km$, si ha

$$F_e = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\,\frac{1.00\,C^2}{1.00 \cdot 10^6\,m^2} = 8.99 \cdot 10^3\,N$$

Esercizio 7. Una carica puntiforme di $+3.0 \cdot 10^{-6}\,C$ dista $12.0\,cm$ da una seconda carica puntiforme di $-1.50 \cdot 10^{-6}\,C$. Calcolare l'intensità della forza su ciascuna carica.

Soluzione. Applichiamo la formula della forza elettrostatica

$$|F_e| = 8.99 \cdot 10^9 \times \frac{+3.00 \cdot 10^{-6}\,C \times -1.50 \cdot 10^{-6}\,C}{0.12^2\,m^2} = 2.81 \cdot 10^{-3}\,N$$

la forza sarà identica su entrambe le cariche.

Esercizio 8. Trovare la distanza che separa due cariche puntiformi $q_1 = 26.0\,\mu C$ e una carica puntiforme $q_2 = -47.0\,\mu C$ affinché la forza elettrica attrattiva tra di esse sia pari a $5.70\,N$.

Soluzione. È necessario in questo caso utilizzare una forma inversa della legge di Coulomb, nella quale la grandezza incognita sia la distanza, cioè

$$d = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{F}} = \sqrt{\frac{8.99 \cdot 10^9 \times 26.0 \cdot 10^{-6} \times (47.0 \cdot 10^{-6})}{5.70}} = 1.39\,m$$

le cariche vengono calcolate in valore assoluto.

Esercizio 9. Due particelle aventi la stessa carica vengono tenute a una distanza di $3.2 \cdot 10^{-3}\,m$; a un certo punto esse sono lasciate libere. Si misurano le accelerazioni iniziali delle particelle che risultano essere pari a $7.0\,m/s^2$ e $9.0\,m/s^2$. La massa della prima particella è $\times 6.3 \cdot 10^{-7}\,kg$. Determinare la massa e la carica della seconda particella.

Soluzione. La seconda legge di Newton descrive il legame tra la forza e l'accelerazione impressa a un corpo. Pertanto se

$$F_1 = m_1 a_1 = \times 6.3 \cdot 10^{-7} \times 7.0 \, \frac{m}{s^2} = 4.4 \cdot 10^{-6} \, N$$

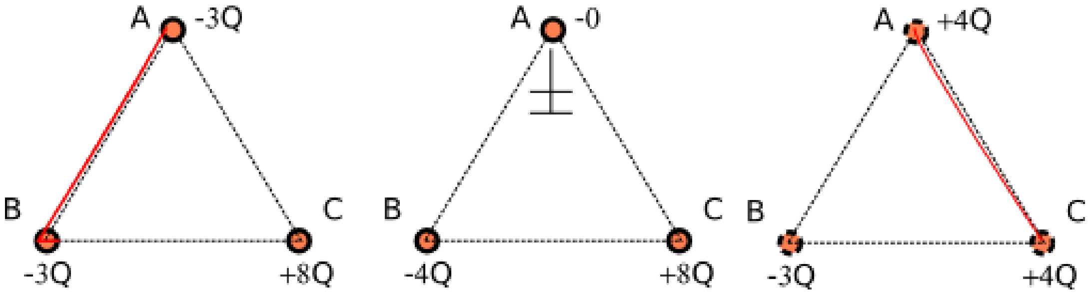
Ma per la terza legge di Newton $F_1 = F_2$, per cui

$$m_2 = \frac{F_2}{a_2} = \frac{4.4 \cdot 10^{-6} \, N}{9.0 \, \frac{m}{s^2}} = 4.9 \cdot 10^{-7} \, kg$$

e di conseguenza per la legge di Coulomb la carica sarà

$$q = \sqrt{\frac{Fd^2}{k}} = \sqrt{\frac{4.4 \cdot 10^{-6} \, N \times \left(3.2 \cdot 10^{-3} \, N\right)^2}{8.99 \cdot 10^9 \, \frac{Nm^2}{C^2}}} = 7.1 \cdot 10^{-11} \, C$$

Esercizio 10. Tre sfere conduttrici identiche A, B, C sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato d (vedi figura). Esse hanno cariche iniziali rispettivamente di $-2Q$, $-4Q$, $8Q$. Trovare il modulo della forza tra A e C. Si eseguono poi le seguenti operazioni: si mettono in contatto momentaneamente con un sottile filo A e B; poi si collega a terra A; infine si collegano temporaneamente col filo A e C. Trovare i moduli delle forze tra A e C e tra B e C.



Soluzione. Calcoliamo dapprima la forza che si esercita tra le sfere cariche A e C

$$F_{A-C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{16Q^2}{d^2} = \frac{4Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

La figura mostra le operazioni eseguite e le corrispondenti variazioni nelle distribuzioni di carica, per cui la forza tra A e C diviene

$$F_{A-C} = \frac{16Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{4Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

e la forza tra B e C sarà

$$F_{B-C} = \frac{12Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{3Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

Esercizio 11. Due sfere conduttrici identiche,1 e 2, possiedono una egual quantità di carica e sono tenute a una distanza reciproca molto maggiore rispetto al loro diametro. Una forza elettrostatica **F** agisce sulla sfera 2 per effetto della sfera 1. Si supponga che una terza sfera identica 3, dotata di un manico isolante inizialmente scarica, venga messa in contatto prima con la sfera 1, poi con la sfera 2 e infine venga rimossa. Si trovi la forza elettrostatica che agisce sulla sfera 2 in funzione di **F**.

Soluzione. La forza che la sfera 1 esercita sulla 2 è

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{d^2}$$

se la sfera 3 viene a contatto con la 1, allora essa riceverà metà della carica di 1, cioè la sfera 1 e la 3 avranno una carica $\frac{Q}{2}$. Ora, se la sfera 3 viene a contatto anche con la 2, si avrà una ridistribuzione di carica pari a $\frac{3Q}{4}$. Pertanto la forza che si esercita sarà

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{Q}{2} \cdot \frac{3Q}{4}}{d^2} = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0} \frac{3Q^2}{d^2} = \frac{3}{8} F$$

Esercizio 12. Tre particelle cariche, q_1, q_2, q_3 nell'ordine, sono poste lungo una linea retta, separate ognuna da una distanza d. Le cariche q_1e $q_2$sono tenute ferme. La carica q_3, posta tra le due, è libera di muoversi e viene a trovarsi in equilibrio rispetto all'azione delle forze elettriche. Si determini $q_1$in funzione di q_2.

Soluzione. Se la carica q_3 è in equilibrio significa che la forza prodotta dalle cariche q_1 e q_2 sono uguali e contrarie. Pertanto

$$F_{1-3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_3}{(2d)^2}$$

$$F_{2-3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d^2}$$

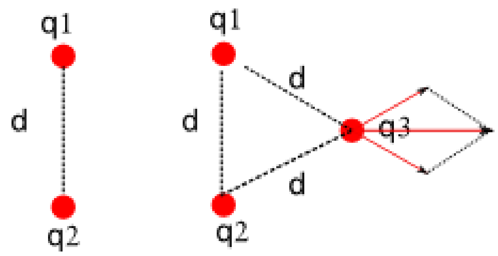
Eguagliando le due forze, si ha

$$\frac{q_1 q_3}{4d^2} = -\frac{q_2 q_3}{d^2}$$

da cui

$$q_1 = -4q_2$$

Esercizio 13. La figura mostra due cariche q_1 e q_2 tenute ferme a una distanza d l'una dall'altra. Trovare l'intensità della forza elettrica che agisce su q_1. Si supponga $q_1 = q_2 = 20.0\,\mu C$ e $d = 1.50\,m$. Una terza carica $q_3 = 20.0\,\mu C$ vie4ne avvicinata e collocata come mostrato sempre in figura. Si determini l'intensità della forza elettrica agente su q_1.



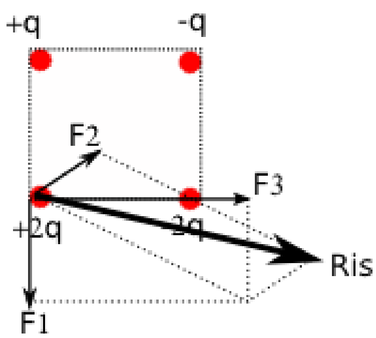
Soluzione. Determiniamo l'intensità della forza nella prima disposizione

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} = 8.99 \cdot 10^9 \, \frac{\left(20.0 \cdot 10^{-6}\right)^2}{1.50^2} = 1.60\,N$$

Aggiungiamo ora la terza carica, che, come nella figura, si dispone nel terzo vertice di un triangolo equilatero. Sulla carica q_1 agiranno ora entrambe le cariche. Vale sempre il principio di somma vettoriale delle forze, per cui la risultante sarà il doppio dell'altezza del triangolo equilatero avente per lato l'intensità della forza

$$F = 2 \times 1.60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.77\,N$$

Esercizio 14. Quattro cariche sono disposte ai vertici di un quadrato, come mostrato in figura. Si assuma $q = 1.10 \cdot 10^{-7}\,C$ e il lato del quadrato, a, uguale a $5.0\,cm$. Trovare le componenti verticali e e orizzontali della forza elettrostatica risultante agente sulla carica $+q$.



Soluzione. Calcoliamo l'intensità delle forze, ricordando che se il lato del quadrato è uguale ad a, allora la sua diagonale è uguale a $a\sqrt{2}$:

$$F_1 = k\frac{2q^2}{a^2} \qquad F_2 = k\tfrac{2q^2}{2a^2} = k\tfrac{q^2}{a^2} \qquad F_3 = k\frac{4q^2}{a^2}$$

da cui si deduce che

$$F_2 = \frac{F_1}{2} \qquad F_1 = \tfrac{1}{2}F_3 \qquad F_3 = 4F_2$$

Assumiamo come versi positivi quello diretto verso l'alto e a destra. Osservando i vettori disegnati in figura si ricava che F_1 ha solo componente verticale, per cui

$$F_{1x} = 0 \qquad F_{1y} = -k\frac{2q^2}{a^2}$$

il vettore F_2 è diretto lungo la diagonale e forma quindi con il lato un angolo di 45°, per cui le due componenti saranno uguali

$$F_{2x} = \frac{F_2}{\sqrt{2}} = k\frac{q^2}{a^2} \qquad F_{2y} = \frac{F_2}{\sqrt{2}} = k\frac{q^2}{a^2}$$

Il terzo vettore è diretto lungo il lato ed avrà solo componente orizzontale

$$F_{3x} = k\frac{4q^2}{a^2} \qquad F_{3y} = 0$$

Sommiamo ora le componenti vettorialmente

$$\begin{aligned} R_x &= 0 + k\frac{q^2}{a^2} + k\frac{4q^2}{a^2} = k\frac{5q^2}{a^2} = \frac{8.99 \cdot 10^9 \times 4 \times \left(1.10 \cdot 10^{-7}\right)^2}{\left(5.0 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 0.17\,N \\ R_y &= -k\frac{2q^2}{a^2} + k\frac{q^2}{a^2} + 0 = -k\frac{q^2}{a^2} = -\frac{8.99 \cdot 10^9 \times \left(1.10 \cdot 10^{-7}\right)^2}{\left(5.0 \cdot 10^{-2}\right)^2} = -0.046\,N \end{aligned}$$

Esercizio 15. Due cariche q_1 e q_2 sono posto rispettivamente sull'asse x nei punti $x = -a$ e $x = +a$. Trovare la relazione tra le due cariche affinché sia nulla la forza elettrostatica netta che agisce su una terza carica $+Q$ posta nel punto $x = \frac{a}{2}$.

Soluzione. Se la forza totale è nulla, allora le due forze prodotte da q_1e q_2 devono essere uguali in modulo e contrarie in verso. Pertanto,

$$F_1 = k\frac{q_1 Q}{\frac{9}{4}a^2} = F_2 = k\frac{q_2 Q}{\frac{1}{4}a^2}$$

da cui

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{4}} = 9$$

[il calcolo era riducibile al quadrato del rapporto tra le due distanze]

Esercizio 16. Due piccole sfere vengono caricate positivamente con una carica totale pari a $5.0 \cdot 10^{-5}\,C$. Le sfere si respingono con una forza elettrostatica di $1.0\,N$ essendo tenute ad una distanza di $2.0\,m$. Calcolare la carica su ciascuna sfera.

Soluzione. La somma delle due cariche è pari a $5.0 \cdot 10^{-5}\,C$ e il loro prodotto è ottenibile applicando la legge di Coulomb

$$1\,N = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{q_1 q_2\,C^2}{4.0\,m^2}$$

per cui

$$q_1 q_2 = \frac{4}{8.99 \cdot 10^9} = 4.45 \cdot 10^{-10}$$

ricordando le proprietà delle soluzioni delle equazioni di secondo grado $x_1 + x_2 = -s$ e $x_1 x_2 = p$, si possono ottenere le singole cariche risolvendo l'equazione

$$Q^2 - 5.0 \cdot 10^{-5} Q + 4.45 \cdot 10^{-10} = 0$$

da cui $q_1 = 1.2 \cdot 10^{-5}$ e $q_2 = 3.8 \cdot 10^{-5}$.

Esercizio 17. Due sfere conduttrici identiche caricate con segno opposto si attraggono con una forza di $0.108\,N$ essendo tenute ad una distanza di $50.0\,cm$. Le sfere vengono improvvisamente collegate con un filo conduttore, che viene poi rimosso. Alla fine le sfere si respingono con una forza elettrostatica di $0.0360\,N$. Trovare le cariche iniziali delle sfere.

Soluzione. Prima del collegamento il prodotto delle due cariche vale:

$$q_1 q_2 = \frac{Fd^2}{k} = \frac{0.108\,N \times 0.25\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{N}{C^2 m^2}} = -3.0 \cdot 10^{-12}\,C^2$$

dopo il collegamento le due cariche sono uguali ma di segno opposto

$$Q^2 = \frac{Fd^2}{k} = \frac{0.0360\,N \times 0.25\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{N}{C^2 m^2}} = 1.0 \cdot 10^{-12}\,C^2$$

da cui

$$Q = 1.0 \cdot 10^{-6}\,\mu C$$

nel collegamento ogni carica sarà pari al valor medio delle due,

$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

per cui

$$q_1 + q_2 = 2.0 \cdot 10^{-6}\,\mu C$$

componendo le due informazioni, si ha

$$\begin{cases} q_1 + q_2 & = & 2.0 \cdot 10^{-6} \\ q_1 q_2 & = & -3.0 \cdot 10^{-12} \end{cases}$$

l'equazione risolvente è

$$Q^2 - 2.0 \cdot 10^{-12} Q \pm 3.0 \cdot 10^{-12} = 0$$

si ottengono due possibili coppie di soluzioni

$$q_1 = 3.0 \cdot 10^{-6}\,C \qquad q_2 = -1.0 \cdot 10^{-6}\,C$$
$$q_1 = -3.0 \cdot 10^{-6}\,C \qquad q_2 = -1.0 \cdot 10^{-6}\,C$$

Esercizio 18. Due cariche $+1.0\,\mu C$ e $-3.0\,\mu C$ vengono poste a una distanza di $10\,cm$. Stabilire dove collocare una terza carica in modo che su di essa non agisca alcuna forza.

Soluzione. Se sulla terza carica non deve agire alcuna forza, allora $F_1 = -F_2$. La carica q_3 può avere segno positivo o negativo. Nel primo caso q_1 eserciterà una forza repulsiva e q_2 attrattiva. Se q_3 è negativa si avrà una condizione invertita. Se q_3 è posta tra le due cariche non si verifica in ogni caso la condizione richiesta perché il verso delle due forze risulta concorde e la somma diversa da zero. La carica q_3 deve pertanto essere esterna alle due cariche e in particolare alla sinistra della carica q_1 che ha valore minore, poiché in questo caso è possibile disporre q_3 ad una distanza inferiore a quella da q_2. Poniamo il riferimento nella carica q_1 e indichiamo con x la distanza tra q_1 e q_3. La distanza tra q_2 e q_3 sarà quindi $10 + x$. La somma delle forze esercitate dalle due cariche su q_3 deve essere nulla e poiché le due forze hanno verso contrario si può scrivere

$$\frac{1q_3}{x^2} = \frac{3q_3}{(10+x)^2}$$

dividendo per q_3 e risolvendo si ha

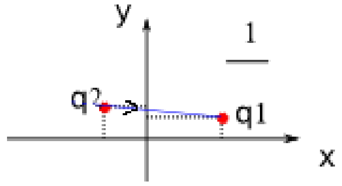
$$\frac{(10+x)^2}{x^2} = 3$$

estraendo la radice quadrata si ha

$$\frac{(10+x)}{x} = \sqrt{3}$$

da cui $x = 14\,cm$.

Esercizio 19. Le cariche e le coordinate di due particelle nel piano xy sono $q_1 = +3.0\,\mu C$, $x_1 = 3.5\,cm$, $y_1 = 0.50\,cm$, e $q_2 = -4.0\,\mu C$, $x_2 = -2.0\,cm$, $y_2 = 1.5\,cm$. Calcolare l'intensità e la direzione della forza elettrostatica su q_2. Stabilire la posizione di una terza carica $q_3 = +4.0\,\mu C$ affinché la forza elettrostatica netta su $q_2$sia nulla.



Soluzione. La figura mostra la posizione delle due cariche in base alle coordinate nel piano cartesiano. Calcoliamo l'intensità della forza mediante la legge di Coulomb dopo aver calcolato la distanza tra le due cariche

$$\overline{q_q q_2}^2 = (3.5+2)^2 + (0.5-1.5)^2 = 31.25\,cm^2$$

$$F = 8.99 \cdot 10^9 \times \frac{3.0 \cdot 10^{-6} \times 4.0 \cdot 10^{-6}}{31.25 \cdot 10^{-4}} = 36\,N$$

lungo la direzione congiungente che forma un angolo con l'asse x

$$\theta = \arctan\left(-\frac{2}{11}\right) = -10^\circ$$

la carica q_3 deve essere posta a sinistra della carica q_2 e sulla congiungente le due cariche, poiché esercita su q_2 una forza attrattiva così come q_1. Dovrà pertanto risultare $F_{1-2} = -F_{3-2}$, e quindi in valore assoluto $F_{3-2} = 36\,N$. Calcoliamo quindi la distanza tra le due cariche

$$\overline{q_3 q_2} = \sqrt{\frac{8.99 \cdot 10^9 \times 4.0 \cdot 10^{-6} \times 4.0 \cdot 10^{-6}}{36}} = 6.7\,cm$$

applicando i teoremi sui triangoli rettangoli, si può ottenere l'incremento in ascissa e ordinata rispetto al punto in cui è posta la carica q_2:

$$\begin{aligned}\Delta x &= 6.7 \times \cos(-10^\circ) = 6.6 \\ \Delta y &= 6.7 \times \sin(-10^\circ) = 1.2\end{aligned}$$

Pertanto le coordinate del punto in cui si trova q_3 saranno

$$\begin{aligned}x_{q_3} &= -8.6\,cm \\ y_{q_3} &= 2.7\,cm\end{aligned}$$

Esercizio 20. Due cariche puntiformi libere $+q$ e $+4q$ si trovano ad una distanza L l'una dall'altra. Una terza carica viene posta in modo che l'intero sistema sia in equilibrio. Trovare segno, valore e posizione della terza carica.

Soluzione. L'unica possibilità affinché tutte le cariche risultino in equilibrio è che la terza carica sia negativa e posta tra le due. In queste modo si possono contrastare le forze repulsive delle due cariche positive. (È possibile verificare graficamente mediante i vettori delle forze questa condizione). Tutte le tre cariche devono stare in equilibrio, pertanto devono annullarsi tutte le coppie di forze che agiscono su ogni carica. Tenendo conto dei segni si ha

$$\begin{cases} -F_{13} + F_{12} = 0 \\ -F_{23} + F_{12} = 0 \\ -F_{13} - F_{23} = 0 \end{cases}$$

sommando la prima e la terza, cambiata di segno, si ha la condizione

$$F_{12} + F_{23} = 0$$

e sostituendo i valori assegnati e indicando con x la distanza tra la carica 1 e la 3 e $L-x$ la distanza tra la carica 2 e la 3

$$\frac{4q^2}{L^2} = \frac{-4qq_3}{(L-x)^2}$$

da cui si ricava

$$q_3 = -\frac{q(L-x)^2}{L^2}$$

per ricavare la distanza incognita utilizziamo la prima relazione tra le forze

$$-\frac{qq_3}{x^2} = \frac{4q^2}{L^2}$$

da cui si ricava

$$q_3 = \frac{4qx^2}{L^2}$$

confrontando le due relazioni

$$-\frac{q(L-x)^2}{L^2} = \frac{4qx^2}{L^2}$$

risolvendo, si ottiene

$$(L-x)^2 = 4x^2$$

svolgendo si ha l'equazione

$$3x^2 + 2Lx - L^2 = 0$$

da cui si ottiene

$$x = \frac{1}{3}L$$

e la terza carica sarà

$$q_3 = \frac{-4q\frac{1}{9}L^2}{L^2} = -\frac{4q}{9}$$

Esercizio 21. Quanto dovrebbero valere due cariche positive uguali che, poste sulla Terra e sulla Luna, fossero in grado di neutralizzare la loro attrazione gravitazionale? È necessario conoscere la distanza Terra-Luna? Quante tonnellate di idrogeno ionizzato sarebbero necessarie per avere la carica calcolata?

Soluzione. L'attrazione dovuta alla forza gravitazionale tra le due cariche, essendo poste su Terra e Luna corrisponde all'attrazione tra le masse dei due astri

$$F = G\frac{m_T m_L}{R^2}$$

dove R è la distanza Terra-Luna. La forza repulsiva elettrica è espressa da

$$F = k\frac{q^2}{R^2}$$

affinché le forze siano uguali deve valere

$$Gm_T m_L = kq^2$$

e come si può osservare la distanza R non interviene in tale relazione. Ora

$$q = \sqrt{\frac{Gm_T m_L}{k}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2} \times 5.98 \cdot 10^{24} \times 7.36 \cdot 10^{22}\ [kg^2]}{8.99 \cdot 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}}} = 5.7 \cdot 10^{13}\, C$$

Se la carica è quella di un protone (idrogeno ionizzato) allora vale $1.602 \cdot 10^{-19}\, C$ e quindi il numero dei protoni è

$$n^\circ = \frac{5.7 \cdot 10^{13}}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 3.6 \cdot 10^{32}\, protoni$$

e nota la massa di un protone si ha

$$m = 3.6 \cdot 10^{32} \times 1.67 \cdot 10^{-27}\, kg = 600\, ton$$

Esercizio 22. Una certa carica Q viene divisa in due parti q e $Q - q$. Trovare la relazione tra Q e q affinché le due frazioni, poste ad una distanza data, producano la massima repulsione elettrostatica.

Soluzione. La forza elettrostatica tra le due cariche è

$$F = k\frac{q\,(Q-q)}{r^2}$$

Dati r e k, il massimo di F sarà il massimo del prodotto $qQ - q^2$. Dal punto di vista algebrico questo è un polinomio di 2° grado nella lettera q, che si rappresenta mediante una parabola rivolta verso il basso per la presenza del coefficiente negativo del termine quadrato. Il suo massimo coincide con il vertice della parabola, cioè

$$V \equiv F_{max}\left(\frac{Q}{2}; \frac{Q^2}{2}\right)$$

per cui avremo $q = \frac{Q}{2}$.

Esercizio 23. Due cariche Q vengono fissate su due vertici opposti di un quadrato. Due cariche q vengono poste sugli altri due vertici. Se la forza elettrica risultante su Q è nulla, trovare la relazione tra q e Q. Valutare se è possibile scegliere q in modo che la forza elettrica risultante su ogni carica sia nulla.

Soluzione. Se la forza risultante su Q è nulla, allora q deve avere carica di segno opposto e le forze esercitate dalle due cariche q sulla Q sono la componente orizzontale e verticale della forza equilibrante la forza repulsiva tra le due cariche Q. Calcoliamo la forza repulsiva tra le due cariche Q, supposto l il lato del quadrato

$$F = k\frac{Q^2}{2l^2}$$

tale forza è uguale e opposta alla equilibrante data dalla somma delle forze prodotte dalle due cariche q, poste a 90°rispetto alla carica Q

$$F = \sqrt{2\left(\frac{kqQ}{l^2}\right)} = k\frac{qQ}{l^2}\sqrt{2}$$

La somma delle due forze è nulla, pertanto

$$k\frac{Q^2}{2l^2} = -k\frac{qQ}{l^2}\sqrt{2}$$

riducendo, si ottiene

$$\frac{Q}{2} = -q\sqrt{2}$$

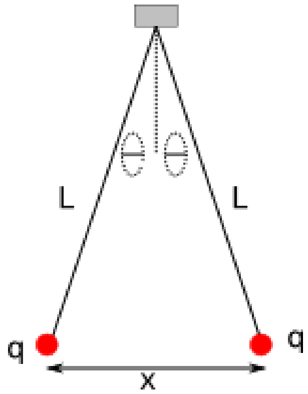
da cui

$$Q = -2\sqrt{2}q$$

Esercizio 24. Due palline uguali di massa m sono appese con fili di seta di lunghezza L e hanno carica q (vedi figura). Si assuma che l'angolo θ sia così piccolo che la $\tan\theta$ possa essere sostituita con $\sin\theta$. Mostrare che. in questa approssimazione, all'equilibrio si ha

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

dove x è la distanza tra le palline. Se $L = 120\,cm$, $m = 10\,g$ e $x = 5.0\,cm$, trovare il valore di q.



Soluzione. Nell'approssimazione indicata la sferetta cade, sotto l'azione del suo peso, lungo la congiungente le due cariche, perché se $\tan\theta \cong \sin\theta$, allora l'altezza del triangolo isoscele è circa il suo lato obliquo. Ciò consente di poter considerare la forza elettrica e quella di richiamo del pendolo come parallele e allineate lungo la congiungente delle cariche. Pertanto, se la forza elettrica equilibra la componente parallela della forza peso si ha

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2} = mg\sin\theta$$

ma per quanto detto il seno dell'angolo è dato dal rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa

$$\sin\theta = \frac{\frac{x}{2}}{L} = \frac{x}{2L}$$

sostituendo, si ha

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2} = \frac{mgx}{2L}$$

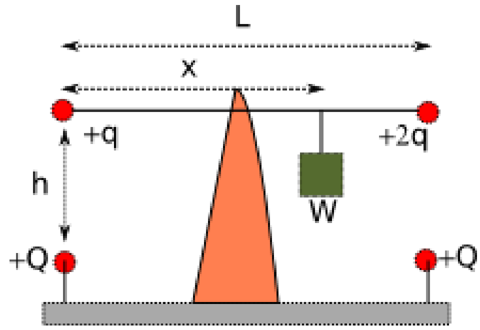
risolvendo rispetto a x

$$x = \sqrt[3]{\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}}$$

Se ora sostituiamo i valori numerici assegnati, si ha

$$q = \sqrt{\frac{mgx^3 4\pi\varepsilon_0}{2L}} = \sqrt{\frac{0.01\,kg \times 9.81\,\frac{m}{s^2} \times 0.05^3\,m^3 \times 4\pi \times 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}}{2.40\,m}} = 2.4 \cdot 10^{-8}\,C$$

Esercizio 25. La figura mostra una lunga asticella di materiale isolante, senza massa, imperniata al centro e bilanciata con un peso W posto alla distanza x dal suo estremo sinistro. Alle estremità sinistra e destra dell'asticella sono poste le cariche q e $2q$ rispettivamente, mentre sotto ognuna di queste cariche è fissata una carica positiva Q a una distanza h. Calcolare la posizione x dove deve essere appeso W affinché l'asticella sia bilanciata.



Soluzione. L'asta non può subire moti traslatori sotto l'effetto delle forze essendo imperniata su un sostegno. Dobbiamo pertanto considerare i momenti delle forze agenti in grado di far ruotare l'asta attorno al perno. Le forze che agiscono sono quelle elettriche F_{qQ}, F_{2qQ}, F_{q2q} e quella gravitazionale dovuta al peso W. Il momento di una forza è definito come il prodotto vettoriale della forza per il suo braccio, cioè della distanza tra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione. La forza F_{q2q} tra le due cariche poste sull'asta è diretta parallelamente all'asta stessa e pertanto il suo momento sarà nullo. Consideriamo solo le forze che agiscono verticalmente. Le forze elettriche, repulsive, sono dirette verso l'alto, mentre la forza gravitazionale è diretta verso il basso. Poiché l'asta è in equilibrio la somma dei momenti deve essere nulla. Calcoliamo i momenti delle singole forze agenti e sommiamoli:

$$k\frac{2qQ}{h^2}\frac{L}{2}+k\frac{2qQ}{h^2}\left(-\frac{L}{2}\right)-W\left(x-\frac{L}{2}\right)=0$$

dove i segni positivi sono stati presi per i versi destra e alto, e negativi sinistra e in basso. Risolvendo rispetto ad x

$$x=\frac{L}{2}+k\frac{qQ}{h^2W}\frac{L}{2}=\frac{L}{2}\left(1+k\frac{qQ}{h^2W}\right)$$

2. Quantizzazione della carica (cariche viste come multipli di una carica elementare)

Esercizio 26. In un cristallo di sale uno ione di sodio (Na^+, di carica $+e$) cede uno dei suoi elettroni a uno ione vicino di cloro (Cl^-, di carica $-e$). Lo ione positivo di sodio e quello negativo di cloro si attraggono per effetto della forza elettrostatica. Se gli ioni distano $2.82\cdot10^{-10}\,m$, trovare la forza di attrazione.

Esercizio. risolviamo ancora applicando la legge di Coulomb, sapendo che la carica $e=1.602\cdot10^{-19}\,C$

$$F_e=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\left(1.602\cdot10^{-19}\right)^2\,C^2}{\left(2.82\cdot10^{-10}\right)^2\,m^2}=2.90\cdot10^{-9}\,N$$

Esercizio 27. Un neutrone vie pensato come la riunione di un quark up di carica $+\frac{2}{3}e$ e due quark down di carica $-\frac{e}{3}$ ciascuno. Se i quark down si trovano a una distanza di $2.6\cdot10^{-15}\,m$ all'interno del neutrone, trovare la forza repulsiva tra essi.

Soluzione. (I quark formano il neutrone perché sono legati da una forza molto più intensa di quella elettrica che agisce a distanze molto piccole ed è quindi in grado di vincere la repulsione coulombiana). La forza repulsiva tra i quark down sarà

$$F_e=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\frac{1}{9}\left(1.602\cdot10^{-19}\right)^2\,C^2}{\left(2.6\cdot10^{-15}\right)^2\,m^2}=3.8\,N$$

Esercizio 28. Trovare la carica totale in coulomb di $75.0\,kg$ di elettroni.

Soluzione. È necessario pertanto conoscere la massa degli elettroni per determinare il loro numero e quindi la carica complessiva; $m_e=9.11\cdot10^{-31}\,kg$. Il numero degli elettroni sarà

$$n_e=75\,kg\times\frac{1}{9.11\cdot10^{-31}}\frac{1}{kg}=8.23\cdot10^{31}$$

la carica complessiva sarà

$$q=8.23\cdot10^{31}\times1.602\cdot10^{-19}\,C=-1.31\cdot10^{13}\,C$$

Esercizio 29. Determinare i $MCoul$ di carica positiva (o negativa) presenti in 1.00 moli di gas neutro molecolare di idrogeno.

Soluzione. Una mole di idrogeno contiene un numero di atomi pari al numero di Avogadro, cioè $6.02 \cdot 10^{23}$. La massa totale è pari a $1.00797\,g$. Gli atomi di idrogeno possiedono una carica positiva e una negativa. Pertanto la quantità di carica sarà

$$q = 2 \times 6.02 \cdot 10^{23} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = 96440\,C = 0.19\,MC$$

Esercizio 30. La forza elettrostatica tra due ioni identici separati da una distanza di $5.0 \cdot 10^{-10}\,m$ è di $3.7 \cdot 10^{-9}\,N$. Trovare la carica di ciascuno ione e il numero di elettroni mancanti a ciascuno ione.

Soluzione. Essendo gli ioni identici, la carica di ciascuno sarà data da

$$q = \sqrt{\frac{Fr^2}{k_0}} = \sqrt{\frac{3.7 \cdot 10^{-9}\,N \times (5.0 \cdot 10^{-10})\,m^2}{8.99 \cdot 10^9}} = 3.21 \cdot 10^{-19}\,C$$

Sia n il numero di elettroni mancanti per ogni ione. Allora, $ne = q$, da cui

$$n = \frac{q}{e} = \frac{3.21 \cdot 10^{-19}\,C}{1.602 \cdot 10^{-19}\,C} = 2$$

Esercizio 31. L'atmosfera terrestre è continuamente bombardata da protoni generati dai raggi cosmici in qualche parte dello spazio. Se i protoni passassero tutti attraverso l'atmosfera, ogni metro quadrato di superficie terrestre riceverebbe una media di 1500 protoni al secondo. Trovare la corrente elettrica corrispondente sulla superficie della Terra.

Soluzione. Consideriamo la Terra di forma perfettamente sferica; in tal caso la sua superficie è espressa da $4\pi R^2$, cioè

$$S = 4\pi \times \left(6.37 \cdot 10^6\right)^2\ m^2 = 5.01 \cdot 10^{14}\,m^2$$

Se ogni m^2 riceve 1500 protoni al secondo avremo un numero di protoni al secondo pari a

$$n = 1500\,\frac{1}{m^2 s} \times 5.01 \cdot 10^{14}\,m^2 = 7.65 \cdot 10^{17}\,s^{-1}$$

la carica complessiva nell'unità di secondo, cioè la corrente, sarà

$$i = 7.65 \cdot 10^{17}\,s^{-1} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = 0.122\,A$$

Esercizio 32. Una lampadina da $100\,W$ è sottoposta a una tensione di $120\,V$ e ha una corrente di $0.83\,A$ nel suo filamento. Calcolare il tempo necessario a una mole di elettroni ad attraversare la lampadina.

Soluzione. Una corrente di $0.83\,A$ corrisponde a una carica che passa ogni secondo pari a $0.83\,C$. Una tale carica è determinata dalla somma di

$$n_e = \frac{0.83\,C}{1.602 \cdot 10^{-19}\,C} = 5.2 \cdot 10^{18}$$

una mole contiene $6.02 \cdot 10^{23}$ elettroni, e in un giorno vi sono $t_{sec} = 24 \times 3600 = 86400\,s$, per cui

$$\Delta t = \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{5.2 \cdot 10^{18}} = 115769\,s = \frac{115769}{86400} = 1.34\,giorni$$

Esercizio 33. Calcolare la quantità di carica positiva (in coulomb) presente in un bicchiere d'acqua. Si assuma che il volume dell'acqua contenuta nel bicchiere sia $250\,cm^3$.

Soluzione. L'acqua pura ha una densità pari a $1\,g/cm^3$, per cui in $250\,cm^3$ di acqua avremo una massa di $250\,g$. L'acqua è una molecola composta da due atomi di idrogeno e uno di ossigeno (H_2O) e una mole di acqua corrisponde a $18\,g$. Nel bicchiere avremo quindi

$$n_{moli} = \frac{250}{18} = 14\,moli$$

cioè avremo

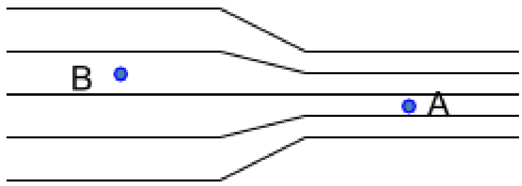
$$n_{molec} = 14 \times 6.02 \cdot 10^{23} = 8.4 \cdot 10^{24}$$

L'idrogeno ha una carica positiva e l'ossigeno ne ha 8, per un totale di 10 cariche positive. Il loro numero complessivo sarà quindi $8.4 \cdot 10^{25}$ e la loro carica complessiva sarà

$$q = 8.4 \cdot 10^{25} \times 1.602 \cdot 10^{-19} = 1.34\,10^7\,C$$

3. CAMPO ELETTRICO

Esercizio 34. In figura sono rappresentate le linee di forza di un campo elettrico separate tra loro a sinistra da uno spazio doppio rispetto a destra. Se nel punto A, $E_A = 40\,N/C$, trovare la forza che agisce su un protone posto in quel punto e determinare poi l'intensità del campo nel punto B.

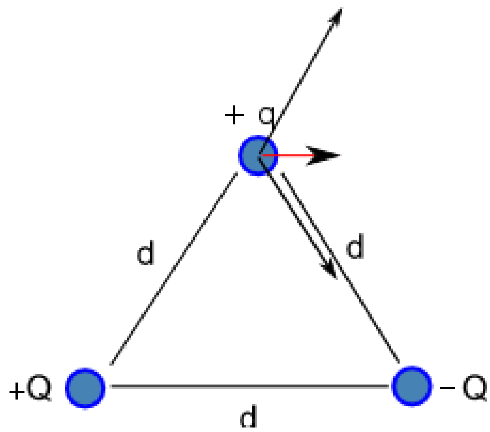


Soluzione. Il campo elettrico è definito come il rapporto tra la forza elettrica e la carica di prova sulla quale agisce tale forza. Pertanto,

$$F = Eq = Ee^+ = 40\,\frac{N}{C} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = 6.4 \cdot 10^{-18}\,N$$

Nel punto B, avendo le linee di campo una separazione doppia, l'intensità del campo elettrico sarà la metà di quella in A, cioè $E_B = 20\,\frac{N}{C}$.

Esercizio 35. In figura, tre cariche sono disposte a formare un triangolo equilatero. Si determini la direzione e il verso della forza che agisce sulla carica $+q$ per effetto dell'azione delle altre due.



Soluzione. La carica $+Q$ eserciterà su $+q$ una forza repulsiva diretta lungo la congiungente le due cariche verso l'alto; la carica $-Q$ eserciterà una forza di uguale intensità ma attrattiva, verso il basso. Essendo i due vettori di uguale modulo, la forza risultante sarà diretta verso destra (come mostrato in figura).

3.1. **Campo generato da una carica puntiforme.**

Esercizio 36. Trovare il valore di una carica puntiforme scelta in modo che il suo campo elettrico a una distanza di $1.00\,m$ valga $1.00\,N/C$.

Soluzione. L'esercizio richiede solo di applicare la definizione di campo elettrico generato da una carica puntiforme, cioè $E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$, da cui, risolvendo rispetto a q, si ha

$$Q = \frac{Er^2}{k_0} = \frac{1.00\,\frac{N}{C} \times 1.00\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = 1.11 \cdot 10^{-10}\,C$$

[un modo sicuro per evitare errori nell'uso delle formule inverse è quello di introdurre sempre le unità di misura e verificare che l'unità del risultato sia quella prevista]

Esercizio 37. Trovare l'intensità di una carica puntiforme il cui campo elettrico, a $50\,cm$, ha l'intensità di $2.0\,N/C$.

Soluzione. Esercizio analogo al precedente, per cui

$$Q = \frac{Er^2}{k_0} = \frac{2.0\,\frac{N}{C} \times 0.25\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = 5.6 \cdot 10^{-11}\,C$$

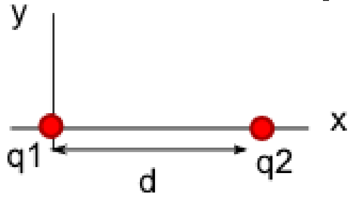
Esercizio 38. Due cariche opposte e di uguale intensità pari a $2.0 \cdot 10^{-7}\,C$ sono poste a una distanza di $15\,cm$. Trovare l'intensità e la direzione di $\mathbf{E}$ nel punto di mezzo tra le due cariche.

Soluzione. Il campo generato da una carica positiva è radiale e con verso uscente dalla carica; viceversa, il campo generato da una carica negativa è sempre radiale, ma entrante. Nel punto di mezzo, pertanto, i due campi si sommano e avranno la direzione della congiungente le due cariche.

$$E_{tot} = E_+ + E_- = 2 \times \frac{8.99 \cdot 10^9\, \frac{Nm^2}{C^2} \times 2.0 \cdot 10^{-7}\mathrm{C}}{\left(7.5 \cdot 10^{-2}\right)^2\, m^2} = 6.4 \cdot 10^5\, \frac{N}{C}$$

(le due cariche formano un dipolo elettrico; la soluzione proposta non fa uso delle formule relative a un dipolo elettrico, ma si basa sulle proprietà note dei campi elettrici e delle linee di forza ad essi associate).

Esercizio 39. Nella disposizione in figura due cariche puntiforme di intensità $q_1 = -5q$ e $q_2 = +2q$ sono separate da una distanza d. Trovare il punto (o i punti= in cui il campo elettrico dovuto alle due cariche è nullo.



Soluzione. Per determinare il campo generato dalle due cariche applichiamo il principio di sovrapposizione, il quale stabilisce che il campo risultante è la somma vettoriale dei campi generati dalle singole cariche. La carica q_1 è posta nell'origine del sistema di riferimento. La soluzione andrà cercata ad una distanza maggiore di d, perché solo in questa semiretta i due vettori campo elettrico hanno versi contrari (ricordiamo che le linee di campo escono da una carica positiva ed entrano in una negativa). Calcoliamo la somma dei due campi, lungo l'asse orizzontale, e la uguagliamo a zero, indicando con x la distanza incognita alla quale i campi si annullano.

$$k_0 \frac{-5q}{|d+x|^2} + k_0 \frac{2q}{x^2} = 0$$

risolvendo e dividendo per $k_0 q$, si ha

$$-5x^2 + 2\left(d^2 + x^2 + 2dx\right) = 0$$

da cui

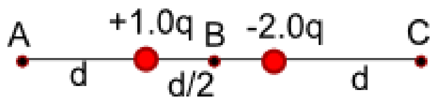
$$3x^2 - 4dx - 2d^2 = 0$$

le cui soluzioni saranno

$$x = \frac{2d \pm d\sqrt{10}}{3}$$

per le osservazioni precedenti, la soluzione sarà $x = d\left(\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right) = 1.7d$.

Esercizio 40. Nella figura le cariche $+1.0q$ e $-2.0q$ sono poste a una distanza d l'una dall'altra. Trovare $\mathbf{E}$ nei punti A, B, C.



Soluzione. Calcoliamo il campo totale prodotto dalle due cariche nel punto A

$$E_A = k_0 \frac{q}{d^2} + k_0 \frac{-2q}{4d^2} = k_0 \frac{q}{2d^2}$$

diretto verso sinistra,
Calcoliamo ora nel punto B

$$E_B = k_0 \frac{4q}{d^2} + k_0 \frac{8q}{d^2} = k_0 \frac{12q}{d^2}$$

verso destra (entrambi i campi sono diretti verso destra e si sommano)
Campo nel punto C

$$E_C = k_0 \frac{q}{4d^2} + k_0 \frac{-2q}{d^2} = -k_0 \frac{7q}{4d^2}$$

verso sinistra, campi in versi opposti.

Esercizio 41. Due cariche puntiformi di intensità $q_1 = 2.0 \cdot 10^{-8}\,C$ e $q_2 = -4.0 q_1$ sono distanti tra loro $50\,cm$. Trovare il punto sull'asse che le congiunge in cui il campo è nullo.

Soluzione. Anche in questo caso il punto non può stare sul segmento avente per estremi le due cariche, perché in tutti questi punti i due campi hanno lo stesso verso. Fissiamo il riferimento nella carica q_1 e indichiamo con x la distanza a partire dal riferimento.

$$E_{tot} = k_0 \frac{2.0 \cdot 10^{-8}}{|x|^2} - k_0 \frac{8.0 \cdot 10^{-8}}{|x-0.5|^2} = 0$$

dividendo per $2k_0 \cdot 10^{-8}$ e svolgendo si ottiene

$$(x-0.5)^2 - 4x^2 = 0$$

da cui

$$x^2 - x + 0.25 - 4x^2 = 0$$

cioè

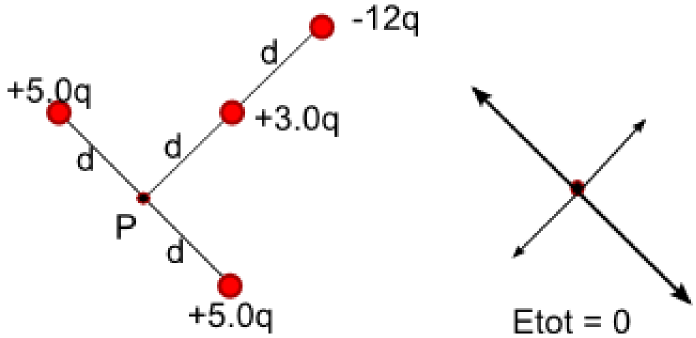
$$3x^2 + x - 0.25 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{6} = \begin{array}{l} \frac{1}{6} = 0.17\,cm \\ \\ -0.5\,cm \end{array}$$

per quanto detto, la soluzione accettabile sarà $x = 0.5\,cm$, alla sinistra di q_1.

Esercizio 42. Trovare il campo elettrico nel punto P con la distribuzione di cariche mostrata in figura.



Soluzione. Abbiamo tre cariche positive con linee di campo uscenti dalle cariche e una carica negativa con linee entranti. Lo schema a fianco della figura indica, non in scala, i vettori campo elettrico. Dallo schema è chiaro che il campo risultante è uguale alla somma dei campi prodotti dalle cariche $+3.0q$ e $-12q$, perché gli altri due si annullano in P. Lo stesso vale per i campi prodotti dalle altre due cariche perché il rapporto tra le cariche è 4 e quello tra il quadrato delle distanze da P è pure uguale a 4. Si ottiene anche dal calcolo

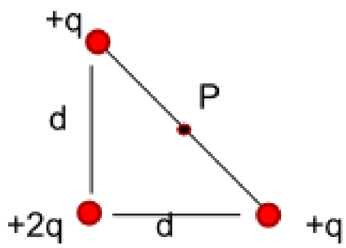
$$E_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{d^2} - \frac{12}{4d^2}\right) = 0$$

Esercizio 43. Ad ogni vertice di un triangolo equilatero di lato $20\,cm$ è collocato un elettrone. Trovare il modulo del campo elettrico nei punti medi dei lati.

Soluzione. Il campo totale è quello prodotto dall'elettrone che sta di fronte ad ogni lato e che ha come estremi due elettroni. La sua distanza dal punto medio è pertanto pari all'altezza del triangolo equilatero, cioè $10\sqrt{3} = 17\,cm$.

$$E = 8.99 \cdot 10^9 \, \frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{1.602 \cdot 10^{-19}\,C}{0.17^2\,m^2} = 5.0 \cdot 10^{-8}\,\frac{N}{C}$$

Esercizio 44. Calcolare la direzione e l'intensità del campo elettrico nel punto P in figura



Soluzione. Le cariche sono disposte nei vertici di un triangolo rettangolo isoscele e, per le proprietà di tale figura, il punto P, posto nel punto medio dell'ipotenusa è anche il piede dell'altezza ad essa relativa. La lunghezza dell'ipotenusa è, per il th. di Pitagora uguale a $d\sqrt{2}$ e l'altezza ad essa relativa è uguale alla metà dell'ipotenusa stessa. Tutte le cariche sono positive e i campi sono tutti uscenti. Nel punto P i campi generati dalle due cariche $+q$ saranno uguali e con versi opposti e la loro somma sarà, pertanto, nulla. Il campo totale è quindi quello generato dalla carica $2q$

$$E = k_0 \frac{2q}{\left(d\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

la direzione è quella dell'altezza relativa all'ipotenusa e il verso è quello uscente.

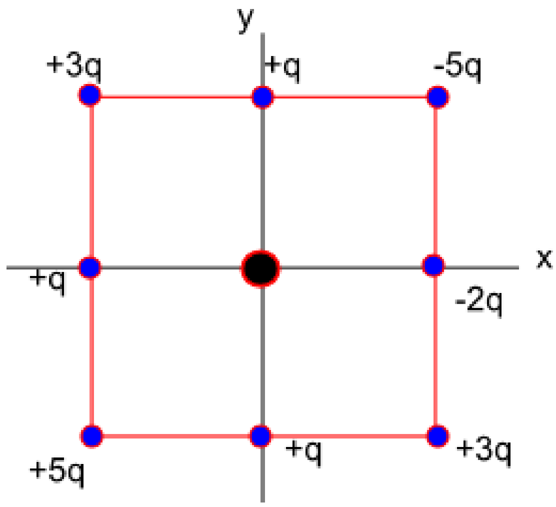
Esercizio 45. Tre cariche sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato a. Agli estremi del segmento di base vi sono due cariche uguali a $+1.0\,\mu C$; nel vertice opposto è collocata una carica incognita Q. Trovare il valore di q affinché il campo elettrico generato dalle tre cariche nel baricentro del triangolo sia nullo.

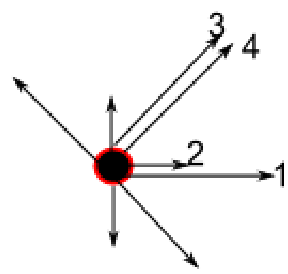
Soluzione. Calcoliamo il campo generato nel baricentro che dista da ogni carica due terzi dell'altezza, cioè $\frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$E = 8.99 \cdot 10^9 \frac{1.0 \cdot 10^{-6}}{\frac{a^2}{3}} = \frac{26970}{a^2}$$

I due vettori formano un angolo di 120° e il loro vettore somma sarà pure uguale allo stesso valore (disegnando i due vettori uguali e applicando la regola del parallelogramma si ottiene un rombo, la cui diagonale maggiore è appunto il vettore somma. La carica Q deve essere pertanto uguale alle due cariche poste alla base.

Esercizio 46. In figura, quattro cariche sono ai vertici di un quadrato e altre quattro cariche sono poste nei punti intermedi dei lati del quadrato. La distanza tra le cariche adiacenti lungo il perimetro del quadrato è d. Trovare intensità e direzione del campo elettrico nel centro del quadrato.





schema vettoriale

Soluzione. Come si vede dalla figura a destra i campi le cariche $+3q$ e $+q$ producono campi nel centro del quadrato di uguale intensità ma di segno opposto, annullandosi reciprocamente. Il campo elettrico sarà quindi dato dalla somma dei vettori dei campi prodotti dalle cariche $\pm 5q$ e $+q$, $-2q$.

$$E_{1+2} = k_0 \left(\frac{q}{\frac{d^2}{4}} + \frac{2q}{\frac{d^2}{4}}\right) = k_0 \left(\frac{4q + 8q}{d^2}\right) = \frac{12qk_0}{d^2}$$

il campo è diretto lungo l'asse x;

$$E_{3+4} = 2k_0 \frac{5q}{\frac{d^2}{2}} = 20k_0 \frac{q}{d^2}$$

diretto lungo la diagonale del quadrato formante un angolo di 45° con l'asse x. Per trovare il modulo del vettore risultante, possiamo trovare le componenti dei due vettori lungo gli assi x, y. Il campo E_{1+2} ha solo la componente x; il campo E_{3+4} forma con l'asse x un angolo di 45°, per cui le sue componenti saranno entrambe uguali a $\frac{20}{\sqrt{2}}$. Sommando le componenti otteniamo il vettore risultante

$$\begin{aligned} E^x_{ris} &= \frac{k_0 q}{d^2}\left(\frac{20}{\sqrt{2}} + 12\right) = 26\frac{k_0 q}{d^2} \\ E^y_{ris} &= \frac{k_0 q}{d^2}\frac{20}{\sqrt{2}} = 14\frac{k_0 q}{d^2} \end{aligned}$$

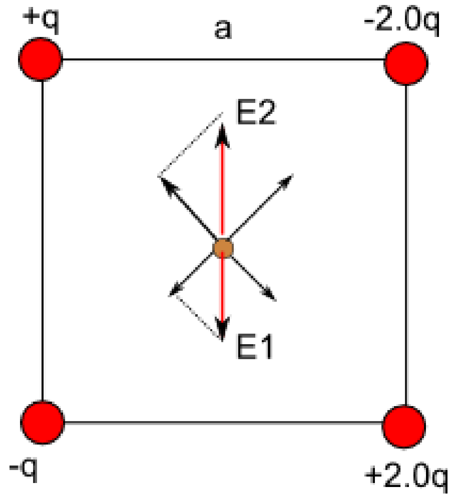
Il modulo del vettore risultante sarà

$$E_{ris} = \sqrt{26^2 + 14^2} = 29.5 \frac{k_0 q}{d^2}$$

l'angolo che si tale forma con l'asse orizzontale sarà

$$\alpha = \arctan\left(\frac{14}{26}\right) = 28^\circ$$

Esercizio 47. Determinare l'intensità e la direzione del campo elettrico nel punto centrale di un quadrato. Si assuma $q = 1.0 \cdot 10^{-8}\,C$ e $a = 5.0\,cm$.



Soluzione. (Proponiamo un metodo risolutivo basato quasi esclusivamente sulla geometria della disposizione delle cariche e sulle proprietà della stessa e delle figure formate dai vettori campo elettrico). La figura mostra la disposizione delle cariche e i vettori campo elettrico (in rosso le risultanti). I moduli dei campi generati dalle cariche di valore doppio hanno un valore doppio. I vettori risultanti, in rosso, avranno modulo uno doppio dell'altro (infatti, raddoppiando il lato di un quadrato, raddoppia pure la sua diagonale). Il campo elettrico risultante sarà quindi diretto lungo il semiasse verticale positivo e avrà valore uguale alla differenza tra i due campi, cioè al modulo del campo E_1. La distanza delle quattro cariche dal centro del quadrato è $d = 5\frac{\sqrt{2}}{2}\,cm = 3.5\,cm$

$$E_1 = 8.99 \cdot 10^9 \times \left(\frac{1.0 \cdot 10^{-8}\,C}{0.035^2\,m^2}\right) \times \sqrt{2} = 1.04 \cdot 10^5\,\frac{N}{C}$$

Esempio 48. Tre cariche positive eguali $q_1 = q_2 = q_3 = q$ sono fisse nei vertici di un triangolo equilatero di lato l. Calcolare la forza elettrica agente su ognuna delle cariche e il campo elettrostatico nel centro del triangolo.

Soluzione. Per calcolare la forza che agisce su una delle cariche, ad esempio su q_3, calcoliamo i campi $\mathbf{E}_1$, e $\mathbf{E}_2$ prodotti da q_1, e q_2 nel punto P_3 (la carica q_3 funge da carica di prova). Essendo q_3 equidistante da q_1 e q_2, in modulo

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

I due campi sono disposti simmetricamente rispetto all'asse y e quindi le loro componenti lungo l'asse x, eguali ed opposte, si annullano nella somma; invece le componenti lungo l'asse y, eguali e concordi, sommandosi danno il modulo

$$E = E_{1,y} + E_{2,y} = \frac{2q\cos 30^\circ}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

lo stesso risultato si può ottenere da

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 60^\circ$$

La forza $\mathbf{F}$ che agisce su $q_3 = q$ vale

$$F = q_3 E = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 l^2} u_y$$

Il vincolo che tiene ferma ciascuna carica deve esercitare una forza eguale e contraria. Il centro C del triangolo equilatero è equidistante dai vertici, per cui i moduli dei campi $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ generati dalle tre cariche eguali nel centro sono eguali. I tre vettori sono disposti come i lati di un triangolo equilatero e quindi

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = 0$$

Il campo nel centro è nullo. Se ponessimo in C una carica, essa non risentirebbe di alcuna forza e resterebbe in equilibrio (instabile).

4. Campo elettrico generato da un dipolo elettrico

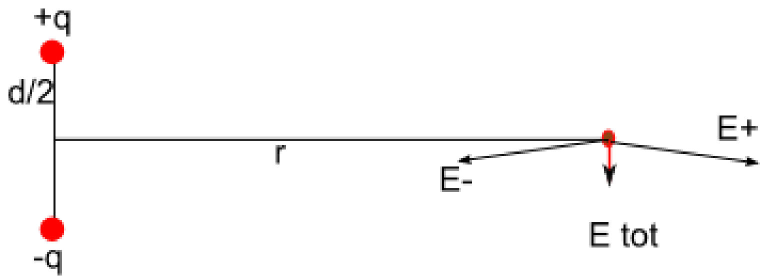
Un dipolo elettrico è una disposizione di due cariche della stessa intensità, ma di segno opposto, separate da una distanza fissa d.

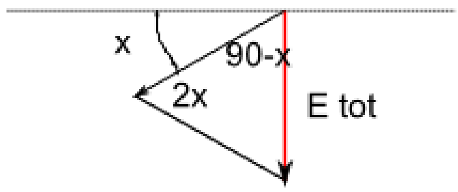
Esercizio 49. Calcolare il momento di dipolo elettrico di un elettrone e di un protone posti a una distanza di $4.30\,nm$.

Soluzione. Il momento di dipolo è un vettore il cui modulo è dato dal prodotto qd, cioè tra la carica e la distanza che le separa e la cui direzione è quella della retta congiungente, lungo la quale viene calcolata la distanza. Il momento caratterizza una tale configurazione e il campo elettrico da esso generato è considerato in punti che si trovano a distanza molto maggiori della separazione tra le cariche.
Il protone e l'elettrone hanno cariche uguali ma di segno opposto e il momento di dipolo sarà

$$p = qd = 1.602 \cdot 10^{-19}\,C \times 4.30 \cdot^{-9}\ m = 6.89 \cdot 10^{-28}\,Cm$$

Esercizio 50. Calcolare l'intensità e la direzione del campo elettrico generato da un dipolo elettrico, in un punto P situato a una distanza $r \gg d$ lungo l'asse perpendicolare al segmento che unisce le cariche.





Soluzione. l'approssimazione indicata è quella che caratterizza il calcolo del campo generato da un dipolo. In questo caso il punto non lungo l'asse del dipolo, ma lungo l'asse della distanza che separa le due cariche. Indichiamo con x l'angolo che il vettore E_- forma con l'asse; la figura mostra il modello geometrico con i valori degli angoli. Pertanto il campo E_{tot} sarà calcolabile applicando il teorema dei seni

$$\frac{E_-}{\sin(90-x)} = \frac{E_{tot}}{\sin 2x}$$

da cui

$$E_{tot} = E_- \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} = 2E_- \sin x$$

ma $\sin x = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2}{4}+r^2\right)}}$; calcoliamo ora il campo elettrico nel punto P, sapendo che la distanza di P dalle cariche è determinata applicando il teorema di Pitagora $dist^2 = \frac{d^2}{4} + r^2$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\frac{d^2}{4} + r^2}$$

da cui

$$E_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{\frac{d^2}{4} + r^2} \times \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2}{4} + r^2\right)}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{\left(\frac{d^2}{4} + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

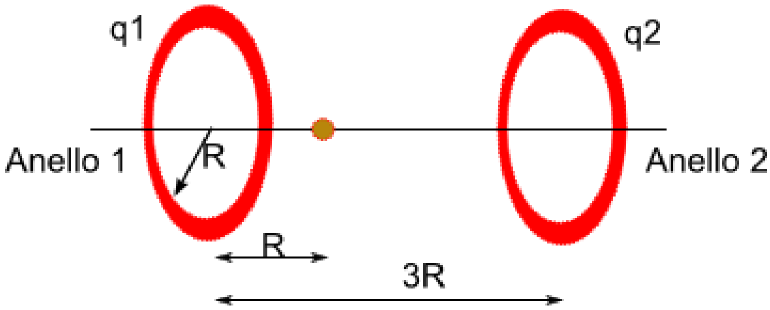
applicando l'approssimazione indicata $r \gg d$, si può riscrivere

$$E_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{r^3}$$

il campo sarà diretto, come mostrato in figura, parallelamente alla retta congiungente le due cariche.

5. Campo elettrico generato da una carica lineare

Esercizio 51. La figura mostra due anelli di raggio R non conduttori paralleli e normali a un asse su cui sono centrati. L'anello 1 ha carica puntiforme q_1 e l'anello 2 ha carica uniforme q_2. La distanza tra gli anelli è $3R$. Si osserva campo elettrico nullo nel punto P sull'asse a distanza R dall'anello 1. Trovare il rapporto tra le due cariche.



Soluzione. Il campo elettrico generato da una distribuzione lineare di carica su un anello isolante è dato da

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dove z è la distanza lungo l'asse, $d^2 = z^2 + R^2$ è la distanza di ogni segmento di anello dal punto P. per l'anello 1, avremo, applicando il teorema di Pitagora,

$$d_1^2 = 2R^2$$

mentre per l'anello 2

$$d_2 = 5R^2$$

il campo totale sarà quindi

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 R}{\left(2R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q_2 R}{\left(5R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

il campo si annulla se

$$\frac{q_1}{2\sqrt{2}R^2} = \frac{2q_2}{5\sqrt{5}R^2}$$

da cui

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{2}{5\sqrt{5}R^2} \times 2\sqrt{2}R^2 = 0.51$$

Esercizio 52. Trovare la distanza lungo l'asse centrale di un anello di raggio R r carica uniforme, alla quale l'intensità del campo elettrico raggiunge un massimo.

Soluzione. [Questo esercizio è risolvibile solo da coloro che hanno già affrontato lo studio dell'analisi matematica]. La funzione $E(z)$ che esprime il campo elettrico in funzione della distanza z assume un valore di massimo quando la sua derivata si annulla. Pertanto,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0$$

riscriviamo

$$\frac{d}{dz}\left(z\left(z^2 + R^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = 0$$

$$\left(z^2 + R^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}z\left(z^2 + R^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2z = 0$$

$$\left(z^2 + R^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left[1 - \frac{3z^2}{z^2 + R^2}\right] = 0$$

ma $z^2 + R^2$ è sempre positivo, per cui

$$1 - \frac{3z^2}{z^2 + R^2} = \frac{z^2 + R^2 - 3z^2}{z^2 + R^2} = 0$$

una frazione è nulla se lo è il numeratore

$$2z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 53. Un elettrone viene fissato sull'asse centrale dell'anello di carica q e raggio R. Si mostri che la forza elettrostatica esercitata sull'elettrone può farlo oscillare attorno al centro dell'anello con una frequenza angolare di

$$\omega=\sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$$

dove q è la carica dell'anello ed m la massa dell'elettrone.

Soluzione. Il campo elettrico in un punto sull'asse dell'anello carico uniformemente è dato da

$$E=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Se la carica dell'anello q è positiva, nei punti sopra l'anello il campo è diretto verso l'alto e in quelli sotto verso il basso. Assumiamo come positiva la direzione verso l'alto. La forza che agisce su un elettrone sull'asse è

$$F=-\frac{eqz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

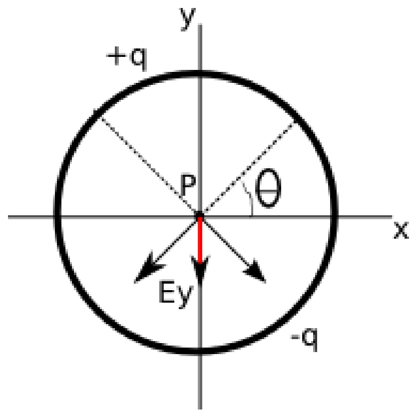
se consideriamo $z\ll R$, allora si può riscrivere

$$F=-\frac{eqz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

L'elettrone ha una carica negativa e la forza elettrica è attrattiva e tende a tirare l'elettrone verso il punto di equilibrio $z=0$. Dalla relazione si osserva, inoltre, che il modulo della forza è direttamente proporzionale a z, e tale forza può essere vista come una forza elastica del tipo $F=-kx$, come se l'elettrone fosse collegato a una molla con costante elastica $k=\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$. L'elettrone si muoverà, quindi di moto armonico semplice con frequenza angolare

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$$

Esercizio 54. Nella figura, due asticelle di plastica, una di carica $+q$ e l'altra di carica $-q$, formano un cerchio di raggio R su un piano xy. Un'asse x passa attraverso i punti di giunzione, e la carica è distribuita uniformemente su tutte e due le asticelle. Trovare l'intensità e la direzione del campo elettrico $\mathbf{E}$ prodotto nel centro del cerchio.



Soluzione. La figura mostra il modello risolutivo. Consideriamo dapprima la metà asticella positiva. Ogni elemento ds di tale asticella produce un campo elettrico$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda ds}{R^2}$, dove ds è il tratto elementare di circonferenza e λ è la densità lineare di carica. Se consideriamo pressoché puntiforme il tratto ds, si può scrivere, utilizzando la definizione di angolo radiante, $ds=Rd\theta$. Scomponendo questo vettore nelle due componenti x,y, si può osservare che le componenti lungo l'asse x sono uguali in modulo ma opposte in verso e quindi la loro somma sarà sempre nulla (non sono disegnate infatti in figura). Le componenti y saranno date da $dE_y=dE\sin\theta$. Il campo elettrico totale prodotto nel punto P dall'asta semicircolare positiva sarà data dalla somma di tutti questi contributi

$$E=\int dE_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{0^\circ}^{180^\circ}\frac{\lambda ds}{R^2}\sin\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{0^\circ}^{180^\circ}\frac{\lambda Rd\theta}{R^2}\sin\theta=$$
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{0^\circ}^{180^\circ}\sin\theta d\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\cos\theta\right)_0^{180}=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

ma $\lambda=\frac{q}{\pi R}$ (cioè carica totale diviso l'intera semicirconferenza), per cui

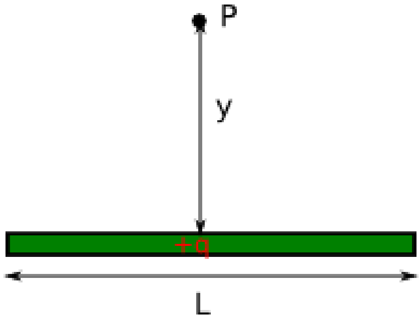
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2q}{\pi R^2}$$

Se consideriamo ora anche l'asticella con carica negativa, possiamo osservare che essa è simmetrica alla precedente e, inoltre, che il campo sarà diretto nello stesso verso, poiché per una carica negativa il campo è entrante. Il contributo, pertanto, dell'asticella negativa si sommerà al precedente e, quindi, avremo

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4q}{\pi R^2}=\frac{q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

Esercizio 55. Una sottile bacchetta isolante di lunghezza finita L possiede una carica totale q, distribuita uniformemente su di essa. Dimostrare che l'intensità E del campo elettrico nel punto P sull'asse perpendicolare della bacchetta (vedi figura) è dato da

$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 y}\frac{1}{\left(L^2+4y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$



Soluzione. Assumiamo come asse x la retta lungo la quale è disposta la bacchetta e come asse y l'asse del segmento rappresentato dalla bacchetta di lunghezza L. Suddividiamo la bacchetta in tanti segmenti elementari ds e sommiamo poi il contributo di ciascuno. Essendo la carica q positiva il campo elettrico sarà uscente, cioè diretto verso l'esterno. Essendo il punto P sull'asse di simmetria il contributo delle componenti orizzontali dei vari campi dE_x si nullo e dovremo considerare solo la componente verticale di tali campi, che varierà al variare dalla distanza di P dai vari ds. La distanza di ogni ds da P sarà espressa da $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Avremo

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}\qquad dE_y=dE\cos\theta$$

ma $r=\sqrt{x^2+y^2}$ e $\cos\theta=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pertanto

$$dE_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\lambda y dx}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dE_y=\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{y^2}\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

Osservazione. calcoliamo l'integrale. Sostituendo $x=y\tan z$, $dx=\frac{ydz}{\cos^2 z}$ avremo

$$\begin{aligned}
\int\frac{\frac{ydz}{\cos^2 z}}{\left(y^2\tan^2 z+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} &= \int\frac{ydz}{\cos^2 z\cdot\left(y^2\tan^2 z+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \int\frac{ydz}{y^3\cos^2 z\cdot\frac{1}{\cos^2 z}\cdot\frac{1}{\cos z}}=\frac{1}{y^2}\int\cos z dz\\
&= \frac{1}{y^2}\sin z=\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{\frac{x^2}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2}+1}}=\frac{x}{y^2}\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

sostituendo $\sin z=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 z}}}=\sqrt{\frac{\tan^2 z}{\tan^2 z+1}}$

Il campo elettrico sarà, pertanto

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\frac{L}{2}}{y^2\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}+\frac{\frac{L}{2}}{y^2\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}\right)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{y\sqrt{\frac{L^2}{4}+y^2}}\\
&= \frac{\frac{q}{L}}{2\pi\varepsilon_0 y}\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2+4y^2}}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 y}\cdot\frac{1}{\sqrt{L^2+4y^2}}
\end{aligned}$$

Esercizio 56. Una bacchetta isolante di lunghezza L possiede una carica $-q$ distribuita uniformemente sulla sua lunghezza, come in figura. Trovare la densità lineare di carica sulla bacchetta. Determinare il campo elettrico nel punto P, a una distanza a dal bordo della bacchetta; se P fosse molto lontano dalla bacchetta, a una distanza molto maggiore rispetto alla lunghezza L, la bacchetta apparirebbe come una carica puntiforme. Mostrare che il campo elettrico si riduce all'espressione del campo di una carica puntiforme.

Soluzione. la densità lineare è data da $\lambda = -\frac{q}{L}$. Calcoliamo il campo elettrico assumendo come x la direzione lungo la quale è disposta la bacchetta carica e sommando i contributi di tutti i campi dE generati da ogni tratto infinitesimo posto a una distanza variabile$x$. Avremo

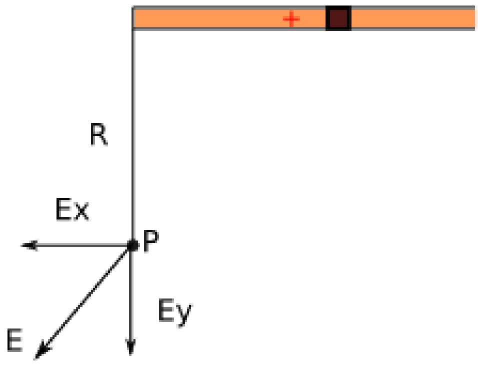
$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{L+a}\frac{\lambda dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{L+a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{L+a}+\frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{L}{a\,(L+a)} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{1}{L+a} \end{aligned}$$

Se ora $a \gg L$, allora $L + a \simeq a$ e il campo elettrico sarà

$$E \simeq -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

cioè il campo prodotto da una carica puntiforme posta alla distanza a dal punto P

Esercizio 57. In figura, una bacchetta isolante semi ■infinita■ porta una carica uniforme per unità di lunghezza pari a λ. Dimostrare che il campo elettrico nel punto P forma un angolo di 45° rispetto alla bacchetta e che questo risultato è indipendente dalla distanza R.



Soluzione. In questo caso dobbiamo trovare entrambe le componenti del campo elettrico lungo le direzioni x (quella diretta come la barretta) e y (quella diretta lungo R). Indichiamo con θ l'angolo che la direzione del campo forma con l'asse y. Avremo

$$dE_x = dE\sin\theta \qquad dE_y = dE\cos\theta$$

La distanza di ogni segmento infinitesimo della bacchetta è $r = \sqrt{R^2+x^2}$. Le componenti dE_x sono tutte dirette verso sinistra (considerando la figura) e le dE_y verso il basso. (Ricordiamo che il campo prodotto da una carica positiva ha verso uscente). Calcoliamo

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta$$

ma $\cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$, per cui avremo

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{R^2+x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Pertanto,

$$E_y = \frac{R\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

L'integrale è come quello dell'es. 57, per cui si avrà

$$E_y = \frac{R\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{R^2}\sqrt{\frac{1}{x^2+R^2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{R\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

[infatti, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{R^2}\sqrt{\frac{1}{x^2+R^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{xR^2\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}}=\frac{1}{R^2}$]. Calcoliamo ora la componente orizzontale

$$dE_x=dE\sin\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}\sin\theta$$

ma $\sin\theta=\frac{x}{r}$, per cui avremo

$$dE_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{R^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

da cui

$$E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{R}{R^2+x^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Come si può osservare, le due componenti sono uguali e quindi l'angolo formato tra ognuna di esse e il vettore campo elettrico deve essere uguale a 45°; infatti, $\tan\theta=1$. Inoltre, essendo il loro rapporto uguale a 1, il risultato è indipendente da R.

Esercizio 58. Un disco di raggio $2.5\,cm$ ha densità di carica superficiale di $5.3\,\mu C/m^2$ sulla faccia superiore. Trovare il modulo del campo elettrico generato dal disco nel punto sul suo asse centrale a distanza $z=12\,cm$ dal disco.

Soluzione. Il campo elettrico generato da un disco con una distribuzione uniforme della carica è espresso da

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

dove σ è la carica superficiale, R il raggio del disco e z la distanza sull'asse del disco dove viene calcolato il campo. Sostituendo

$$E=\frac{5.3\cdot10^{-6}\,\frac{C}{m^2}}{2\times8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}\left(1-\frac{0.12\,m}{\sqrt{0.12^2+0.025^2}\,m}\right)=6293\,\frac{N}{C}$$

Esercizio 59. Trovare la carica q necessaria presente in modo uniforme sulla superficie di un disco di raggio $2.5\,cm$ affinché il campo elettrico sulla superficie e nel centro del disco stesso sia uguale a $3.0\cdot10^6\,N/C$. si supponga che ogni atomo sulla superficie del disco abbia una sezione efficace equivalente di $0.015\,nm^2$.Trovare il numero di atomi presenti sulla superficie. Se la carica sul disco è dovuta ad elettroni in eccesso che alcuni tra gli atomi superficiali possiedono, trovare la frazione di tali atomi superficiali.

Soluzione. Il campo elettrico generato da un disco con carica distribuita uniformemente è dato da

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

se z tende a zero, allora $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, per cui

$$\sigma=2\varepsilon_0E$$

ma, poiché $\sigma=\frac{q}{A}$, con A area del disco, avremo

$$q=2A\varepsilon_0E=2\pi\left(2.5\cdot10^{-2}\right)^2\,m^2\cdot8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\cdot3.0\cdot10^6\,\frac{N}{C}=1.04\cdot10^{-7}\,C$$

Il numero di atomi sulla superficie del disco sarà dato da

$$n=\frac{\pi\left(2.5\cdot10^{-2}\right)^2\,m^2}{\left(0.015\cdot10^{-18}\right)\,m^2}=1.31\cdot10^{17}$$

La frazione di atomi con elettroni in eccesso sarà

$$f=\frac{q}{ne}=\frac{1.04\cdot10^{-7}\,C}{1.31\cdot10^{17}\cdot1.602\cdot10^{-19}\,C}=5.0\cdot10^{-6}$$

Esercizio 60. Trovare la distanza lungo l'asse di un disco carico di raggio R, alla quale l'intensità del campo elettrico è uguale alla metà del valore del campo che si ha al centro della superficie del disco.

Soluzione. Il valore del campo elettrico al centro del disco è pari a $E_{centro} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, mentre il campo in un punto posto sull'asse del disco ad una distanza z è dato da

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

con R, raggio del disco. Avremo

$$\frac{\sigma}{4\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Svolgendo si ottiene

$$\frac{1}{2} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

da cui

$$z^2 + R^2 = 4z^2 \qquad z = R\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Esercizio 61. Un elettrone viene lasciato libero da fermo in un campo elettrico uniforme di intensità $2.00 \cdot 10^4\, N/C$. Calcolare l'accelerazione dell'elettrone, trascurando la gravità.

Soluzione. Il campo elettrico genera una forza

$$F = eE = 1.602 \cdot 10^{-19}\, C \times 2.00 \cdot 10^4\, \frac{N}{C} = 3.20 \cdot 10^{-15}\, N$$

l'accelerazione sarà quindi, dalla seconda legge di Newton,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3.20 \cdot 10^{-15}\, N}{9.11 \cdot 10^{-31}\, kg} = 3.51 \cdot 10^{15}\, \frac{m}{s^2}$$

Esercizio 62. Un elettrone viene accelerato verso est a $1.80 \cdot 10^9\, \frac{m}{s^2}$ da un campo elettrico. Determinare l'intensità e la direzione del campo elettrico.

Soluzione. Nota la massa dell'elettrone, è possibile conoscere la forza che ha prodotto tale accelerazione e da essa, si ottiene poi il campo.

$$E = \frac{F}{e} = \frac{m_e a}{e} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}\, kg \times 1.80 \cdot 10^9\, \frac{m}{s^2}}{1.602 \cdot 10^{-19}\, C} = 1.02 \cdot 10^{-2}\, \frac{N}{C}$$

l'elettrone viene accelerato verso est, la forza è repulsiva e il campo è pertanto generato da una carica negativa ed è diretto nella stessa direzione, ma in verso opposto.

Esercizio 63. Calcolare il modulo della forza dovuta a un dipolo elettrico di momento $3.6 \cdot 10^{-29}\, C \cdot m$, agente su un elettrone distante $25\, nm$ dal centro del dipolo sul suo asse. Questa distanza si può considerare grande rispetto alle dimensioni del dipolo.

Soluzione. Il campo elettrico generato da un dipolo è dato da $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3}$, dove $p = qd$, d distanza tra le due cariche che formano il dipolo, è il momento di dipolo e z la distanza presa sull'asse del dipolo stesso. La forza è data da $F = Ee$, dove e è la carica dell'elettrone. Allora

$$F = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}\, C}{2\pi \times 8.85 \cdot 10^{-12}\, \frac{C^2}{Nm^2}} \frac{3.6 \cdot 10^{-29}\, C \cdot m}{(25 \cdot 10^{-9}\, m)^3} = 6.64 \cdot 10^{-15}\, N$$

Esercizio 64. In aria umida si provoca una scarica (le molecole si ionizzano) quando il campo elettrico raggiunge il valore $3.0 \cdot 10^6\, N/C$. Trovare, in quel campo, l'intensità della forza elettrostatica su un elettrone e su uno ione mancante di un singolo elettrone.

Soluzione. La forza elettrica è data da $F = Ee$, quindi

$$F = 3.0 \cdot 10^6\, \frac{N}{C} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\, C = 4.8 \cdot 10^{-13}\, N$$

nel secondo caso la forza sarà la stessa perché lo ione ha un eccesso di una carica positiva, il cui valore è uguale a quello dell'elettrone.

Esercizio 65. Una particella α, nucleo dell'atomo di elio, ha una massa di $6.64 \cdot 10^{-27}\, kg$ e una carica uguale a $+2e$. Trovare l'intensità e la direzione del campo elettrico tale da bilanciare il suo peso.

Soluzione. Il peso della particella α è bilanciato dalla forza esercitata dal campo elettrico in verso opposto se

$$E=\frac{F_g}{2e}=\frac{6.64\cdot10^{-27}\,kg\times9.81\,\frac{m}{s^2}}{2\times1.602\cdot10^{-19}\,C}=2.03\cdot10^{-7}\,\frac{N}{C}$$

Esercizio 66. Un ammasso di nuvole cariche produce un campo elettrico nell'aria vicino alla superficie terrestre. Una particella con carica $-2.0\cdot10^{-9}\,C$ subisce una forza elettrostatica tendente verso il basso di $3.0\cdot10^{-6}\,N$ quando viene posta in questo campo. Trovare (a) l'intensità del campo elettrico; (b) l'intensità e la direzione della forza elettrostatica esercitata su un protone posto in questo campo; (c) la forza gravitazionale esercitata sul protone; (d) il rapporto tra la forza elettrostatica e la forza gravitazionale.

Soluzione. (a) L'intensità del campo elettrico è data da

$$E=\frac{F}{e}=\frac{3.0\cdot10^{-6}\,N}{2.0\cdot10^{-9}\,C}=1.5\cdot10^{3}\,\frac{N}{C}$$

(b) la carica di un protone è uguale a quella di un elettrone ed è pari a $1.602\cdot10^{-19}\,C$; in questo campo la forza sarà

$$F=Ee^{+}=1.5\cdot10^{3}\,\frac{N}{C}\times1.602\cdot10^{-19}\,C=2.4\cdot10^{-16}\,N$$

tale forza sarà diretta verso l'alto, cioè sarà repulsiva
(c) la forza gravitazionale esercitata sul protone è

$$F_G=mg=1.67\cdot10^{-27}\,kg\times9.81\,\frac{m}{s^2}=1.6\cdot10^{-26}\,N$$

(d) il rapporto tra le due forze è dato da

$$\frac{F_e}{F_G}=\frac{2.4\cdot10^{-16}\,N}{1.6\cdot10^{-26}\,N}=1.5\cdot10^{10}$$

Esercizio 67. Un campo elettrico **E** con un'intensità media di circa 150 N/C è diretto verso il basso nell'atmosfera vicino alla superficie terrestre. Si vuole "far galleggiare" in questo campo una sfera di zolfo con peso $4.4\,N$, caricando la sfera. Trovare la carica (segno e intensità) necessaria e indicare perché l'esperimento non può riuscire.

Soluzione. Se la sfera deve "galleggiare" allora la forza prodotta dal campo elettrico deve essere pari al suo peso. Quindi, da $E=\frac{F}{q}$, avremo

$$q=\frac{F}{E}=\frac{4.4\,N}{150\,\frac{N}{C}}=0.029\,C$$

essendo il campo diretto verso il basso, la carica sorgente ha segno positivo e la carica della sfera dovrà avere segno negativo per subire una forza attrattiva verso l'alto.
Esprimiamo il campo elettrico come $E=\frac{F}{q}=k_0\frac{Q}{r^2}$ e la massa della sfera attraverso la sua densità

$$\rho_{zolfo}=\frac{m}{V}=\frac{\frac{4.4\,N}{9.8\,\frac{m}{S^2}}}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{0.11}{r^3}$$

ma la densità della zolfo è $\rho_{zolfo}=2100\,\frac{kg}{m^3}$, per cui

$$r=\sqrt[3]{\frac{0.11}{2100}}=0.04\,m$$

e il campo elettrico sarà

$$E=k_0\frac{Q}{r^2}=8.99\cdot10^{9}\times\frac{0.029}{(0.04)^2}=1.62\cdot10^{11}\,\frac{N}{C}$$

un'intensità troppo alta per un campo atmosferico.

Esercizio 68. Trovare l'accelerazione di un elettrone in un campo elettrico uniforme di $1.40\cdot10^{6}\,N/C$ e il tempo affinché l'elettrone, partendo da fermo, raggiunga una velocità pari a un decimo di quella della luce. Trovare infine la distanza percorsa durante questo intervallo di tempo.

Soluzione. La risoluzione richiede l'utilizzo delle leggi della cinematica del moto uniformemente accelerato. Il campo elettrico produce sull'elettrone una forza sull'elettrone di carica e

$$F = Ee = 1.40 \cdot 10^{6}\,\frac{N}{c} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = 2.24 \cdot 10^{-13}\,N$$

La seconda legge di Newton afferma che l'accelerazione è direttamente proporzionale alla forza applicata e inversamente proporzionale alla massa del corpo accelerato

$$F = ma \quad \rightarrow \quad a = \frac{F}{m_e} = \frac{2.24 \cdot 10^{-13}\,N}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg} = 2.46 \cdot 10^{17}\,\frac{m}{s^2}$$

se l'elettrone parte da fermo, $v_i = 0$, supponendo che il moto sia uniformemente accelerato, la velocità finale è data da

$$v_f = v_i + at$$

sostituendo i valori e considerando la velocità della luce $c = 3.00 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}$, si ha

$$t = \frac{v_f}{a} = \frac{3.00 \cdot 10^{7}\,\frac{m}{s}}{2.46 \cdot 10^{17}\,\frac{m}{s^2}} = 1.22 \cdot 10^{-10}\,s$$

e la distanza percorsa sarà

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 0.5 \times 2.46 \cdot 10^{17}\,\frac{m}{s^2} \times \left(1.22 \cdot 10^{-10}\,s\right)^2 = 1.83 \cdot 10^{-3}\,m$$

Esercizio 69. Una goccia d'acqua sferica di $1.20\,\mu m$ di diametro viene mantenuta in equilibrio nell'aria calma con un campo elettrico atmosferico $E = 462\,N/C$, tendente verso il basso. Trovare il peso della goccia e il numero di elettroni che determinano la sua carica in eccesso.

Soluzione. Il campo elettrico di una carica positiva è uscente e tale carica, generatrice del campo, attrae la carica in eccesso negativa verso l'alto. Se la goccia rimane in equilibrio, allora tale forza è equilibrata dal peso della goccia stessa, per cui

$$F_e = P = mg$$

La massa della goccia si può ricavare dal suo volume e dalla densità dell'acqua

$$m = \rho V = 1000\,\frac{kg}{m^3} \times \frac{4}{3}\pi\left(0.60 \cdot 10^{-6}\,m\right)^3 = 9.05 \cdot 10^{-16}\,kg$$

il peso sarà pertanto

$$P = 9.05 \cdot 10^{-16}\,kg \times 9.81\,\frac{m}{s^2} = 8.88 \cdot 10^{-15}\,N$$

Possiamo ora ricavare la carica in eccesso sulla goccia conoscendo il campo elettrico e la forza da esso prodotta

$$q = \frac{F_e}{E} = \frac{8.88 \cdot 10^{-15}\,N}{462\,\frac{N}{C}} = 1.92 \cdot 10^{-17}\,C$$

il numero di elettroni sarà dato da

$$n = \frac{1.92 \cdot 10^{-17}}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 120$$

Esercizio 70. In un dato istante le componenti della velocità di un elettrone che si muove tra due piatti carichi e paralleli sono $v_x = 1.5 \cdot 10^{5}\,m/s$ e $v_y = 3.0 \cdot 10^{3}\,m/s$. Se il campo elettrico tra i due piatti è dato da $\mathbf{E} = (120\,N/C)\,\mathbf{j}$, trovare l'accelerazione dell'elettrone e la sua velocità quando la sua coordinata x è variata di $2.0\,cm$.

Soluzione. Il campo elettrico è diretto lungo l'asse y. La forza che accelera l'elettrone è data da

$$F = Ee = 120\,\frac{N}{C} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = 1.92 \cdot 10^{-17}\,N$$

diretta lungo l'asse verticale. L'accelerazione è pertanto diretta verso il basso

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1.92 \cdot 10^{-17}\,N}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg} = \left(-2.11 \cdot 10^{13}\,\frac{m}{s^2}\right)\mathbf{j}$$

la variazione della velocità riguarderà la sola componente verticale. L'elettrone percorrerà $2.0\,cm$ in un tempo

$$t = \frac{s}{v_x} = \frac{0.020\,m}{1.5 \cdot 10^{5}\,\frac{m}{s}} = 1.33 \cdot 10^{-7}\,s$$

la velocità verticale diverrà

$$v_{yf} = v_{yi} + at = 3.0 \cdot 10^{5}\,\frac{m}{s} - 2.11 \cdot 10^{13}\,\frac{m}{s^2} \times 1.33 \cdot 10^{-7}\,s = -2.51 \cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 71. Due grandi piatti di rame paralleli sono posti a una distanza di $5.0\,cm$ e instaurano un campo elettrico uniforme tra loro. Un elettrone viene rilasciato dal piatto carico negativamente nello stesso momento in cui un protone viene rilasciato dal piatto carico positivamente. Si trascuri l'azione tra le particelle e si determini la loro distanza dal piatto positivo quando si incrociano.

Soluzione. il protone emesso dal piatto positivo viene attratto dal piatto negativo e viceversa per l'elettrone. Il campo elettrico che determina la forza elettrica è lo stesso per entrambi. Le due particelle hanno la stessa carica ma si differenziano per la massa. La forza attrattiva è la stessa per entrambe le particelle per cui

$$Ee^- = m_e a_e \qquad Ee^+ = m_p a_p$$

da cui

$$\frac{a_e}{a_p} = \frac{m_p}{m_e} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27}\,kg}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg} = 1.83 \cdot 10^3$$

le due particelle a parità di tempo percorreranno, quindi, distanze diverse; dalle loro leggi orarie si ottiene

$$s_e = \frac{1}{2} a_e t^2 \qquad s_p = \frac{1}{2} a_p t^2$$

il rapporto tra le distanze percorse è pari a $\frac{s_e}{s_p} = \frac{a_e}{a_p} = 1.83 \cdot 10^3$ mentre $s_e + s_p = 5.00$; sostituendo si ha

$$1831 s_p = 5.00 \qquad s_p = 2.73 \cdot 10^{-3}\,cm = 27\,\mu m$$

Esercizio 72. Un pendolo viene sospeso al piatto più alto di due grandi piatti orizzontali. Il pendolo è composto da una sferetta isolante di massa m e carica $+q$ e da un filo isolante di lunghezza l. Trovare il periodo del pendolo se tra i due piatti si instaura un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$ caricando il piatto superiore (a cui è appeso il pendolo) negativamente e quello inferiore positivamente.

Soluzione. Sul pendolo agirà, oltre alla forza di gravità, anche la forza attrattiva del piatto superiore. Tale forza è data da $F = Eq$; il pendolo subirà quindi una accelerazione verso l'alto pari a $a = \frac{Eq}{m}$, diretta quindi come la gravità ma nel verso contrario. Pertanto il periodo di oscillazione sarà

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - \frac{Eq}{m}}}$$

Esercizio 73. Un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$, diretto verso l'alto, di intensità $2.00 \cdot 10^3\,N/C$, si instaura tra due piatti orizzontali caricando positivamente il piatto inferiore e negativamente quello superiore. I piatti hanno una lunghezza $L = 10.0\,cm$ e sono separati da una distanza $d = 2.00\,cm$. Un elettrone viene proiettato tra i due piatti dall'estremità sinistra di quello inferiore. La velocità iniziale v_0 dell'elettrone forma un angolo $\theta = 45°$ con il piatto inferiore e ha un'intensità di $6.00 \cdot 10^6\,m/s$. Determinare se l'elettrone colpirà uno dei due piatti e, in caso affermativo, quale piatto e a quale distanza dall'estremità sinistra.

Soluzione. In assenza del campo elettrico, l'elettrone percorrerebbe una traiettoria parabolica con gittata pari a

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{\left(6.00 \cdot 10^6\right)^2 \times 1}{9.81} = 3.67 \cdot 10^{12}\,m$$

e urterebbe il piatto superiore. Il campo elettrico diretto verso l'alto produce una forza che tende a portare l'elettrone verso l'alto; pertanto l'elettrone urterà il piatto superiore. Il moto verticale è determinato dall'azione della forza di gravità alla quale si oppone il campo elettrico. L'accelerazione verticale sarà

$$a = \frac{Ee}{m} - g = \frac{2.00 \cdot 10^3\,\frac{N}{C} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg} - 9.81\,\frac{m}{s^2} = 3.51 \cdot 10^{14}\,\frac{m}{s}$$

Poniamo l'origine delle nella posizione iniziale dell'elettrone e assumiamo come asse x quello orizzontale con verso positivo a destra e come asse y quello verticale e verso positivo in alto. Dalla cinematica conosciamo le equazioni che descrivono questo moto

$$x = v_0 \cos\theta t \qquad y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_y = v_o \sin\theta - at$$

Troviamo prima la distanza massima percorsa dall'elettrone in verticale. Se fosse minore di d, non colpirebbe il piatto superiore. Se fosse maggiore di d lo colpirebbe in un punto corrispondente a una distanza $x < L$. La massima coordinata verticale si ha quando $v_y = 0$, cioè $v_o \sin\theta - at = 0$, da cui $t = \frac{v_o \sin\theta}{a}$ e la distanza massima

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{a} - \frac{1}{2}a\frac{v_o^2 \sin^2\theta}{a^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2a} = \frac{\left(6.00 \cdot 10^6\right)^2 \times \frac{1}{2}}{2 \times 3.51 \cdot 10^{14}} = 2.56 \cdot 10^{-2}\, cm$$

e ciò mostra che effettivamente l'elettrone urta il piatto superiore. Troviamo ora il tempo impiegato a percorre la distanza d. Essendo

$$\begin{aligned} d &= v_o \sin\theta t - \frac{1}{2}at^2 \\ 2d &= 2v_o \sin\theta t - at^2 \end{aligned}$$

da cui

$$at^2 - 2v_o \sin\theta t + 2d = 0$$

dove $v_0 \sin\theta = 6.00 \cdot 10^6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.24 \cdot 10^6$; sostituendo i valori e risolvendo rispetto a t, si ha

$$t = \frac{4.24 \cdot 10^6 \pm \sqrt{\left(4.24 \cdot 10^6\right)^2 - 2 \times 3.51 \cdot 10^{14} \times 0.02}}{3.51 \cdot 10^{14}} = \frac{4.24 \cdot 10^6 \pm 1.98 \cdot 10^6}{3.51 \cdot 10^{14}}$$

considerando solo la soluzione differenza $t = 6.43 \cdot 10^{-9}\, s$. In questo intervallo di tempo la distanza x percorsa è

$$x = v_0 \cos\theta \times t = 6.00 \cdot 10^6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6.43 \cdot 10^{-9} = 2.73\, cm$$

6. Dipolo in un campo elettrico

Esercizio 74. Un dipolo elettrico costituito da cariche di intensità $1.50\, nC$ separate da $6.20\, \mu m$ viene immerso in un campo elettrico di intensità pari a $110\, N/C$. Trovare il valore del momento di dipolo e la differenza tra le energie potenziali corrispondenti a orientamenti del dipolo parallelo e antiparallelo al campo.

Soluzione. Il momento di dipolo $p = qd$, è dato da

$$p = 1.50 \cdot 10^{-9}\, C \times 6.20 \cdot 10^{-6}\, m = 9.30 \cdot 10^{-15}\, C \cdot m$$

l'energia potenziale di un dipolo è data dal prodotto scalare tra il vettore campo elettrico e il momento di dipolo; il prodotto scalare può essere scritto come

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos\theta$$

essa ha, pertanto, il suo valore massimo quando $\theta = 0$, cioè vettori paralleli, e minimo quando $\theta = 90°$, cioè vettori antiparalleli.

$$\Delta U = 2pE = 2 \times 9.30 \cdot 10^{-15}\, C \cdot m \times 110\, \frac{N}{C} = 2.05 \cdot 10^{-12}\, J$$

Esercizio 75. Un dipolo elettrico è costituito dalle cariche $+2e$ e $-2e$ separate da una distanza di $0.78\, nm$. Esso viene immesso in un campo elettrico di intensità pari a $3.4 \cdot 10^6\, N/C$. Determinare il valore del momento torcente che agisce sul dipolo quando il momento di dipolo è parallelo, ortogonale e opposto al campo elettrico.

Soluzione. Il momento torcente di un dipolo elettrico è data dal prodotto vettoriale tra il momento di dipolo e il campo elettrico che genera la coppia di forze torcenti: $\overrightarrow{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$. Il momento di dipolo è dato da

$$p = qd = 2 \times 1.602 \cdot 10^{-19} \times 0.78 \cdot 10^{-9} = 2.50 \cdot 10^{-28}\, C \cdot m$$

Calcoliamo il momento torcente nei tre casi indicati
momento di dipolo parallelo al campo $\theta = 0$, $\tau = 2.50 \cdot 10^{-28}\, C \cdot m \times 3.4 \cdot 10^6 \times 0 = 0$
momento di dipolo ortogonale al campo $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\tau = 2.50 \cdot 10^{-28}\, C \cdot m \times 3.4 \cdot 10^6 \times 1 = 8.5 \cdot 10^{-22}\, J$
momento di dipolo opposto al campo $\theta = \pi$, $\tau = 2.50 \cdot 10^{-28}\, C \cdot m \times 3.4 \cdot 10^6 \times 0 = 0$

7. Flusso del campo elettrico e teorema di Gauss

Esercizio 76. Una superficie quadrata ha il lato di $3.2\,mm$. Essa è immersa in un campo elettrico uniforme con $E = 1800\,N/C$. Le linee di campo formano un angolo di 35° con la normale uscente. Calcolare il flusso attraverso la superficie.

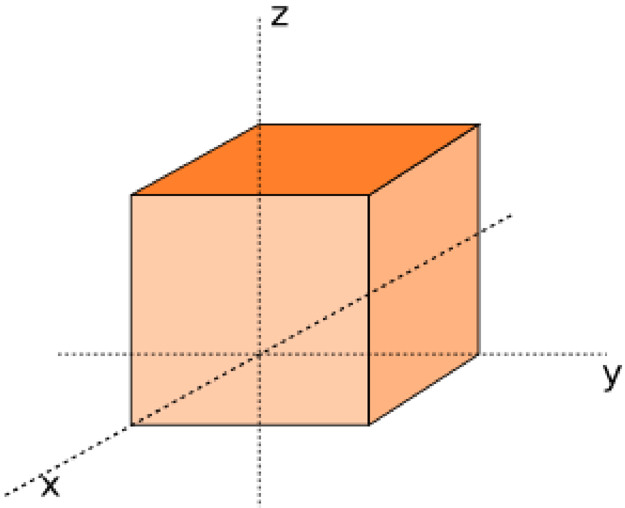
Soluzione. Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie è proporzionale al numero di linee di campo che attraversano la superficie. Nel nostro caso il campo è uniforme e così il numero delle linee. Esso è definito come il prodotto scalare tra il vettore campo elettrico e il vettore che descrive la superficie.

$$\Phi = EA\cos\theta$$

dove θ è l'angolo tra la direzione del campo e la normale alla superficie. Pertanto,

$$\Phi = 1800\,\frac{N}{C} \times \left(3.2 \cdot 10^{-3}\right)^2 m^2 \times \cos 35° = 1.51 \cdot 10^{-2}\,\frac{Nm^2}{C}$$

Esercizio 77. Un cubo di lato pari a $1.40\,m$ è orientato in una regione di campo elettrico uniforme. Trovare il flusso elettrico attraverso la faccia più a destra se il campo elettrico è dato da (a) $6.00\mathbf{i}$, (b) $-2.00\mathbf{j}$ e (c) $-3.00\mathbf{i} + 4.00\mathbf{j}$. Calcolare poi il flusso complessivo attraverso il cubo per ognuno di questi campi.



Soluzione. Nel caso (a) il vettore campo elettrico è diretto lungo l'asse delle x ed è perpendicolare al vettore di superficie:

$$\Phi = EA\cos\theta = 6.00 \times 1.40^2 \times 0 = 0$$

Nel caso (b) il vettore campo elettrico è antiparallelo al vettore superficie e quindi $\Phi = -2.00 \times 1.40^2 \times 1 = -3.92\,\frac{Nm^2}{C}$. Nel caso (c) il vettore campo elettrico è parallelo alla faccia e quindi il flusso è nullo. Se consideriamo il flusso complessivo, data la simmetria del solido per la quale i vettori di superficie sono a due a due paralleli e opposti, il flusso risulterà sempre nullo.

8. LEGGE DI GAUSS

Esercizio 78. Una carica puntiforme di $1.8\,\mu C$ si trova al centro di una superficie gaussiana cubica di lato pari a $55\,cm$. Trovare il flusso elettrico netto attraverso la superficie.

Soluzione. La legge di Gauss mette in relazione il flusso netto Φ di un campo elettrico attraverso una superficie chiusa con la carica netta contenuta in tale superficie. In termini matematici $\varepsilon_0\Phi = q$. Pertanto

$$\Phi = \frac{1.8 \cdot 10^{-6}\,C}{8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}} = 2.0 \cdot 10^5\,\frac{Nm^2}{C}$$

Esercizio 79. Il flusso elettrico netto attraverso ciascuna faccia di un dado ha intensità in unità di $10^3\,Nm^2/C$ che è esattamente uguale al numero che compare sulla faccia stessa (da 1 a 6). Il flusso è entrante per N dispari e uscente per N pari. Trovare la carica netta contenuta nel dado.

Soluzione. Osservando la disposizione dei numeri sulle facce di un dado si nota che le facce opposte sono una pari e una dispari per cui le linee del campo sono sempre parallele a due a due, ma il flusso entrante si considera negativo e quello uscente positivo. Il flusso è pari, quindi, a 3 unità e la carica totale sarà

$$Q = \Phi\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^3 \, \frac{Nm^2}{C} \times 8.85 \cdot 10^{-12} \, \frac{C^2}{Nm^2} = 2.66 \cdot 10^{-8} \, C$$

Esercizio 80. Una carica puntiforme $+q$ si trova a una distanza $d/2$ da una superficie quadrata di lato d ed è posta proprio sopra al centro del quadrato. Trovare il flusso elettrico attraverso il quadrato.

Soluzione. Il campo prodotto dalla carica positiva è diretto verso l'esterno e quindi è entrante nella superficie quadrata. Possiamo considerare tale quadrato come una delle sei facce di un cubo che racchiude la carica. Pertanto il flusso attraverso una faccia sarà la sesta parte del flusso totale

$$\Phi = EA = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4q}{d^2} \times d^2 \right) = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0}$$

Esercizio 81. La legge di Gauss per la gravitazione è

$$\frac{1}{4\pi G} \Phi_g = \frac{1}{4\pi G} \oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -m$$

dove Φ_g è il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie gaussiana che racchiude una massa m. Il campo $\mathbf{g}$ è definito come l'accelerazione di una particella di prova sulla quale m esercita una forza gravitazionale. Ricavare la legge della gravitazione di Newton. Spiegare il significato del segno $-$.

Soluzione. Consideriamo la massa m sorgente del campo gravitazionale e prendiamo una superficie gaussiana sferica attorno a tale massa. Tale scelta è dovuta al fatto che a uguale distanza da m, il campo è lo stesso indipendentemente dalla direzione. Avremo, essendo il campo costante sulla superficie gaussiana

$$\frac{1}{4\pi G} \oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \frac{g}{4\pi G} \oint d\mathbf{A} = \frac{4\pi r^2 g}{4\pi G}$$

Ma il campo gravitazionale sarà per definizione $g = F/M$, dove M è una massa di prova e si avrà quindi

$$-m = \frac{Fr^2}{MG} \qquad F = -G\frac{mM}{r^2}$$

il segno meno indica che il campo è diretto verso l'interno della sfera e ciò descrive il fatto che la forza gravitazionale è solamente attrattiva.

Esercizio 82. Il campo elettrico posto sulla superficie del tamburo carico di una macchina fotocopiatrice ha intensità $E = 2.3 \cdot 10^5 \, N/C$. Trovare la densità di carica superficiale sul tamburo nel caso fosse conduttore.

Soluzione. Applicando la legge di Gauss si ha

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

da cui

$$\sigma = E\varepsilon_0 = 2.3 \cdot 10^5 \, \frac{N}{C} \times 8.85 \cdot 10^{-12} \, \frac{C^2}{Nm^2} = 2.03 \cdot 10^{-6} \, \frac{C}{m^2}$$

Esercizio 83. Una sfera conduttrice uniformemente carica avente raggio di $1.2 \, m$ ha una densità di carica superficiale di $8.1 \, \mu C/m^2$. Trovare la carica sulla sfera e il flusso elettrico totale uscente dalla sua superficie.

Soluzione. L'area della superficie di una sfera è data da

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \times 1.2^2 = 18.1 \, m^2$$

la quantità di carica presente è pertanto

$$Q = \sigma S = 8.1 \cdot 10^{-6} \, \frac{C}{m^2} \times 18.1 \, m^2 = 1.5 \cdot 10^{-4} \, C$$

Il flusso sarà dato da

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1.5 \cdot 10^{-4} \, C}{8.85 \cdot 10^{-12} \, \frac{C^2}{Nm^2}} = 1.7 \cdot 10^7 \, \frac{Nm^2}{C}$$

Esercizio 84. Su un conduttore isolato di forma arbitraria è presente una carica netta di $+10\cdot 10^{-6}\,C$. All'interno del conduttore vi è una cavità in cui è racchiusa una carica $q = +3.0\cdot 10^{-6}\,C$. Trovare la carica sulla parete della cavità e sulla superficie esterna del conduttore.

Soluzione. Consideriamo una superficie gaussiana completamente all'interno del conduttore e che circonda la cavità. Poiché il campo elettrico è uguale a zero ovunque sulla superficie, la carica che racchiude è uguale a zero. La carica netta è la somma della carica q nella cavità e della carica q_p sulla parete della cavità, cosicché $q + q_p = 0$, da cui $q_p = -q = -3\cdot 10^{-6}\,C$.
La carica netta Q del conduttore è la somma della carica q_c della cavità e di quella q_s sulla superficie esterna del conduttore, così $Q = q_c + q_p$ per cui

$$q_s = Q - q_p = 10\,\cdot^{-6} - \left(-3.0\cdot 10^{-6}\right) = -1.3\cdot 10^{-5}\,C$$

Esercizio 85. Una distribuzione rettilinea di carica infinita genera un campo di $4.5\cdot 10^4\,N/C$ a una distanza di $2.0\,m$. Calcolare la densità di carica lineare.

Soluzione. Nel caso di una tale distribuzione possiamo adattare una superficie gaussiano di forma cilindrica posta ad una distanza r dalla distribuzione rettilinea. La densità di carica lineare (carica per unità di lunghezza) in tali circostanze è data da

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0 Er = 2\pi\times 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\times 4.5\cdot 10^4\,\frac{N}{C}\times 2.0\,m = 5.0\cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m}$$

Esercizio 86. Il campo elettrico posto sulla superficie di un tamburo carico di una macchina fotocopiatrice, di lunghezza $42\,cm$ e diametro $12\,cm$, ha intensità $E = 2.3\cdot 10^5\,N/C$. Trovare la carica totale sul tamburo. Per ottenere una versione da tavolo della fotocopiatrice è necessario ridurre la dimensione del tamburo a una lunghezza di $28\,cm$ e a un diametro di $8.0\,cm$. Trovare la carica necessaria a mantenere lo stesso campo elettrico.

Soluzione. Possiamo immaginare una superficie gaussiana di forma cilindrica attorno al tamburo e in tale caso il campo elettrico è pari a

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

per cui

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0 rE = 2\pi\times 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\times 0.06\,m\times 2.3\cdot 10^5\,\frac{N}{C} = 7.67\cdot 10^{-7}\,\frac{C}{m}$$

la superficie che circonda il tamburo avrà un'altezza pari a quella del tamburo stesso, per cui la carica sarà

$$Q_1 = \lambda h = 7.67\cdot 10^{-7}\,\frac{C}{m}\times 0.42\,m = 3.22\cdot 10^{-7}\,C$$

Riducendo ora le dimensioni del tamburo, si riducono anche quelle della superficie gaussiana che lo circonda, per cui, a parità di campo elettrico

$$\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1 h_1} = \frac{Q_2}{2\pi\varepsilon_0 r_2 h_2}$$

da cui

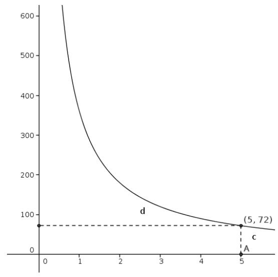
$$Q_2 = Q_1\frac{r_2 h_2}{r_1 h_1} = 3.22\cdot 10^{-7}\,C\times\frac{0.04\times 0.14}{0.06\times 0.21} = 1.43\cdot 10^{-7}\,C$$

Esercizio 87. Sia dato un lungo tubo metallico di sezione circolare, avente una parete sottile e di raggio R con una carica superficiale per unità di lunghezza λ. Determinare l'espressione di E in funzione della distanza r dall'asse del tubo, considerando il caso in cui $r > R$ e quello in cui $r < R$. Tracciare poi i risultati da $r = 0$ a $r = 5.0\,cm$, assumendo che sia $\lambda = 2.0\cdot 10^{-8}\,C/m$ e $R = 3.0\,cm$.

Soluzione. Nel caso in cui $r < R$, si avrà $E = 0$ perché la superficie gaussiana cilindrica con lo stesso asse del cilindro non contiene alcuna carica. Per $r > R$, il campo elettrico avrà intensità costante in tutti i punti di una superficie gaussiana cilindrica di raggio r per la simmetria della stessa. Avremo pertanto, come per tutti i casi simili

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{360}{r}$$

sostituendo i valori assegnati. Il campo sarà quindi inversamente proporzionale alla distanza e il suo andamento può essere rappresentato graficamente dalla figura.



Esercizio 88. Sono dati due lunghi tubi metallici concentrici di raggio a e b con $a < b$. Sul cilindro più interno, di raggio a, è presente una carica superficiale negativa, mentre sul cilindro più esterno, è presente una carica per unità di lunghezza uguale alla precedente ma di segno opposto λ. Utilizzando la legge di Gauss, dimostrare che $E = 0$ per $r < a$ e $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ nella zona compresa tra i cilindri, per $a < r < b$.

Soluzione. Se $r < a$, è possibile scegliere una superficie gaussiana cilindrica concentrica ai due tubi che non contiene alcuna carica (il tubo più piccolo ha, infatti, $r = a$ e la carica è distribuita sulla sua superficie). Il campo elettrico sarà, quindi, nullo. Per $a < r < b$, è possibile considerare una opportuna superficie gaussiana, ancora di forma cilindrica. Essa contiene le cariche negative poste sulla superficie del tubo interno e il campo sarà pertanto $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Tale superficie non contiene la carica positiva, posta sul tubo esterno, e, quindi, tale carica non darà alcun contributo.

Esercizio 89. Su un cavo sottile rettilineo molto lungo è presente una carica negativa con densità di carica lineare di $3.6\, nC/m$. Il cavo viene circondato da una distribuzione di carica uniforme cilindrica avente un raggio di $1.5\, cm$, coassiale con il cavo. La densità di carica superficiale σ del cilindro deve essere scelta in modo tale che il campo elettrico netto entro il cilindro sia nullo. Calcolare la densità di carica positiva, σ, necessaria.

Soluzione. Per il teorema di Gauss, il campo elettrico prodotto dalla carica presente sul filo è dato da$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ ed è diretto radialmente verso l'interno. Assumiamo ora come superficie gaussiana, rasente il cilindro esterno. La carica sul cavo indurrà una carica sulla parete interna del cilindro e tale carica dovrà equilibrare il campo generato dal filo stesso. Pertanto,

$$E_{filo}\left(r = 1.5 \cdot 10^{-2}\right) = \frac{3.6 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.015} = 4316\, \frac{N}{C}$$

Dovendo essere il contributo delle due cariche uguale, anche se di segno opposto, da

$$\lambda = \frac{q}{l} = 3.6 \cdot 10^{-9} \qquad \sigma = \frac{q}{2\pi r l} = \frac{q}{l} \cdot \frac{1}{2\pi r} = \frac{3.6 \cdot 10^{-9}\, \frac{C}{m}}{2\pi \cdot 0.015\, m} = 3.8 \cdot 10^{-8}\, \frac{C}{m^2}$$

Esercizio 90. Su un lungo cilindro conduttore di lunghezza L, è presente una carica totale $+q$. Esso è circondato da un guscio cilindrico conduttore (anch'esso di lunghezza L) su cui è presente una carica totale $-2q$. Utilizzando la legge di Gauss, determinare (a) il campo elettrico nei punti esterni al guscio conduttore, (b) la distribuzione di carica sul guscio conduttore e il (c) campo elettrico nella regione compresa tra il cilindro e il guscio.

Soluzione. Assumiamo una superficie gaussiana concentrica ai due conduttori e calcoliamo il campo elettrico generato dalle rispettive cariche per poi sommare tali campi mediante il principio di sovrapposizione.

$$E_+ = \frac{\lambda_+}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad E_- = \frac{\lambda_-}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

ora,

$$\lambda_+ = \frac{q}{L} \qquad \lambda_- = -\frac{2q}{L}$$

da cui

$$E_+ + E_- = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L} - \frac{2q}{2\pi\varepsilon_0 r L} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L}$$

il campo risultante sarà pertanto diretto verso l'interno e perpendicolare in ogni punto alla superficie gaussiana. (b) La carica in eccesso $+q$ del conduttore interno attrae la carica in eccesso dell'altro fino a formare una distribuzione di carica $-q$ sia sulla parete interna che su quella esterna del conduttore più esterno. (c) Nella regione compresa tra i due gusci una superficie gaussiana può contenere solo la carica $+q$ del conduttore interno, e si avrà

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L}$$

Esercizio 91. Due lunghi cilindri coassiali carichi hanno raggi di $3.0\,cm$ e $6.0\,cm$. La carica per unità di lunghezza è $5.0\cdot10^{-6}\,C/m$ sul cilindro interno e $-7.0\cdot10^{-6}\,C/m$ su quello esterno. Trovare il campo elettrico ad (a) $r=4.0\,cm$ e (b) $r=8.0\,cm$, ove r è la distanza radiale dall'asse centrale.

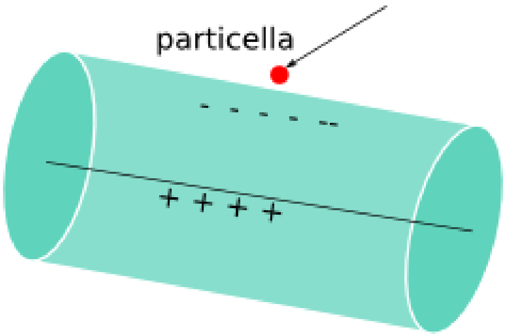
Soluzione. Ad una distanza di $4.0\,cm$ dall'asse centrale una superficie gaussiana conterrà soltanto la carica del cilindro più interno, per cui

$$E\,(r=4.0)=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{5.0\cdot10^{-6}\,\frac{C}{m}}{2\pi\cdot8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\cdot0.04\,m}=2.3\cdot10^6\,\frac{N}{C}$$

Alla distanza $r=8.0\,cm$ una superficie gaussiana conterrà le cariche di entrambi i cilindri, per cui

$$E=E_1+E_2=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}+\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{-2.0\cdot10^{-6}\,\frac{C}{m}}{2\pi\cdot8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\cdot0.08\,m}=-4.5\cdot10^5\,\frac{N}{C}$$

Esercizio 92. In figura è mostrato un contatore Geiger, utilizzato per rivelare le radiazioni ionizzanti. Il contatore è costituito da un filo centrale sottile, su cui è presente una carica positiva, circondato da un cilindro conduttore concentrico su cui è presente una carica negativa uguale in modulo a quella del filo. Tale sistema genera un forte campo elettrico radiale all'interno del cilindro. Il cilindro contiene un gas inerte a bassa pressione. Quando una particella di radiazione entra nel sistema attraverso la parete del cilindro, essa ionizza alcuni atomi del gas. Gli elettroni liberi così rilasciati vengono attratti dal filo centrale positivo. Il campo elettrico è così intenso che nel percorso compreso tra due collisioni successive con gli atomi del gas, gli elettroni acquistano un'energia sufficiente per ionizzare nuovamente gli atomi del gas stessi. Vengono quindi creati molti altri elettroni liberi e il processo si ripete fino a che essi raggiungono il cavo. La valanga di elettroni che ne risulta è raccolta dal filo e genera un segnale che registra il passaggio della particella originaria di radiazione. Si supponga che il raggio del filo centrale sia $25\,\mu m$, il raggio del cilindro $1.4\,cm$ e la lunghezza del tubo $16\,cm$. Se il campo elettrico sulla parete del cilindro è pari a $2.9\cdot10^4\,N/C$, trovare la carica positiva totale sul filo centrale.



Soluzione. Assumiamo come superficie gaussiana la superficie cilindrica del cilindro conduttore. Il campo prodotto sarà uniforme e diretto perpendicolarmente alla superficie verso l'esterno. Esso vale

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Supponiamo che la carica sia distribuita in modo uniforme sul filo e che la sua carica per unità di lunghezza sia λ. Avremo quindi, dalla equazione precedente che

$$\lambda=E2\pi\varepsilon_0 r=2\pi\cdot2.9\cdot10^4\,\frac{N}{C}\cdot8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\cdot0.014\,m=2.3\cdot10^{-8}\,\frac{C}{m}$$

Pertanto

$$q=\lambda L=2.3\cdot10^{-7}\cdot0.16=3.6\cdot10^{-9}\,C$$

Esercizio 93. Un positrone di carica $1.60\cdot10^{-19}\,C$ percorre un'orbita circolare di raggio r concentrica e interna a due cilindri uno di raggio a, quello interno, e b quello più esterno. Trovare l'energia cinetica del positrone in elettronvolt. Si assuma $a=2.0\,cm$, $b=3.0\,cm$ e $\lambda=30\,nC/m$.

Soluzione. Il campo elettrico può essere misurato attraverso una superficie gaussiana cilindrica di raggio $2.0<r<3.0$. Esso sarà uguale a

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{3.0\cdot10^{-8}}{2\pi\cdot8.85\cdot10^{-12}\cdot r}=\frac{539}{r}\,\frac{N}{C}$$

in tal caso è un campo di forze di tipo centripeto che costringe il positrone a percorrere un'orbita circolare di raggio r. La forza sarà del tipo

$$m\frac{v^2}{r} = Ee^+ = \frac{539}{r} \cdot 1.60 \cdot 10^{-19} = \frac{8.63 \cdot 10^{-17}}{r}$$

Possiamo ora ricavare l'energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$, poiché $\frac{1}{2}m\frac{v^2}{r} = \frac{8.63 \cdot 10^{-17}}{2r}$, da cui

$$\frac{1}{2}mv^2 = 4.32 \cdot 10^{-17}\, J = 4.32 \cdot 10^{-17}\, J \times 6.24 \cdot 10^{18}\, \frac{eV}{J} = 270\, eV$$

Esercizio 94. Una carica è distribuita uniformemente in un cilindro infinitamente lungo di raggio R. Mostrare che E a una distanza r dall'asse del cilindro ($r < R$) è dato da

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

dove ρ è la densità di carica volumica. Scrivere, inoltre, un'espressione per E quando $r > R$.

Soluzione. Il campo elettrico dalla carica presente all'interno del volume del cilindro compresa nella superficie gaussiana di raggio r è dato da

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L}$$

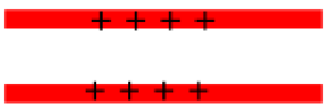
dove L è la lunghezza della detta superficie gaussiana. Ora $q = \rho V$, dove V è il volume della superficie. Avremo

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r L} \cdot \pi r^2 L\rho = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

Se ora la superficie gaussiana è esterna al cilindro dovremo considerare tutta la carica contenuta nel volume del cilindro che è pari a $q = \rho\pi R^2 L$, quindi

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r L} \cdot \rho\pi R^2 L = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

Esercizio 95. Due grandi fogli metallici paralleli sono affacciati come in figura e hanno identica distribuzione di carica positiva. Si determini **E** nei punti alla sinistra, tra di essi e alla destra dei fogli.



Soluzione. Poiché le cariche sono fisse, si può calcolare il campo elettrico prodotto da ogni foglio come se fosse il solo presente per poi sommare i contributi con il principio di sovrapposizione. Tra i due piatti, il campo generato da ogni foglio ha la stessa intensità ma verso opposto per cui la somma è pari a zero. Il campo nei punti a destra e sinistra sarà lo stesso e dato dalla somma dei due contributi, cioè

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Esercizio 96. Un piatto metallico di forma quadrata, ha il lato lungo $8.0\, cm$ e lo spessore trascurabile, con una carica totale di $6.0 \cdot 10^{-6}\, C$. Determinare l'intensità E del campo elettrico al centro appena al di fuori del piatto (ad esempio, ad una distanza di $0.50\, mm$), supponendo che la carica sia uniformemente distribuita sulle due facce del piatto. Determinare poi il campo E a una distanza di $30\, m$ (grande, rispetto alla dimensione del piatto), supponendo che il piatto sia una carica puntiforme.

Soluzione. Il campo generato da un piatto con carica superficiale uniforme è dato, in base al teorema di Gauss, da

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

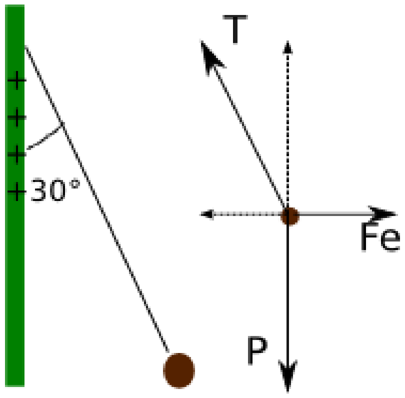
ma $\sigma = \frac{q}{A} = \frac{6.0 \cdot 10^{-6}\, C}{(8.0 \cdot 10^{-2}\, m)^2}$, per cui

$$E = \frac{6.0 \cdot 10^{-6}\, C}{2 \cdot (8.0 \cdot 10^{-2}\, m)^2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\, \frac{C^2}{Nm^2}} = 5.3 \cdot 10^7\, \frac{N}{C}$$

Se calcoliamo il campo ad una distanza di $30\,m$, allora la carica può essere considerata puntiforme (l'angolo sotto cui è visto il lato del quadrato è parti a circa 0.15°) e quindi è applicabile il calcolo del campo per una carica puntiforme, cioè

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = 8.99 \cdot 10^9 \cdot \frac{6.0 \cdot 10^{-6}}{900} = 60\,\frac{N}{C}$$

Esercizio 97. Una piccola sfera avente massa $m = 1.0\,mg$ e carica distribuita uniformemente $q = 2.0 \cdot 10^{-8}\,C$, è appesa a un filo isolante e forma un angolo $\theta = 30°$ con un grande piatto isolante carico uniformemente. Considerando il peso della sfera e assumendo che il piatto si estenda in tutte le direzioni, determinare la densità di carica superficiale σ sul piatto.



Soluzione. Le forze che agiscono sulla sfera sono la gravità, la tensione del filo e la repulsione coulombiana tra le cariche positive del piatto e della sfera stessa. Se la sfera rimane in equilibrio la somma vettoriale delle dette forze è nulla. Poniamo uguale a zero le componenti orizzontali, sapendo che $F_e = Eq$

$$Eq - T\sin 30° = 0$$

e le componenti verticali

$$mg - T\cos 30° = 0$$

Ora,

$$T = \frac{Eq}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}q}{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

sostituiamo nella seconda equazione

$$mg = \frac{\sigma q}{\varepsilon_0}\cos 30° = \frac{\sigma q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sostituendo i valori assegnati possiamo ricavare σ

$$\sigma = \frac{2mg\varepsilon_0}{\sqrt{3}q} = \frac{2 \cdot 10^{-6}\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}{\sqrt{3} \cdot 2.0 \cdot 10^{-8}\,C} = 5.0 \cdot 10^{-9}\,\frac{C}{m^2}$$

Esercizio 98. Due grandi piatti metallici sottili sono paralleli e affacciati. Sulle facce interne, i piatti hanno densità di carica superficiale di segno opposto e di intensità $7.0 \cdot 10^{-22}\,C/m^2$. Determinare $\mathbf{E}$ nei punti a sinistra, a destra e tra i due piatti.

Soluzione. Nei punti posti a sinistra dei due piatti i campi hanno lo stesso valore ma verso opposto, cioè

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\mathbf{i}) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\mathbf{i}) = 0$$

Per i punti posti alla destra la condizione si inverte ma la somma non cambia

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\mathbf{i}) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\mathbf{i}) = 0$$

Tra i due piatti i due campi hanno lo stesso verso e si sommano

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\mathbf{i}) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\mathbf{i}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\mathbf{i}) = \frac{7.0 \cdot 10^{-22}\,\frac{C}{m^2}}{8.85 \cdot 10^{-12}} = 7.9 \cdot 10^{-11}\,\frac{C}{m}(-\mathbf{i})$$

Esercizio 99. Un elettrone viene proiettato direttamente verso il centro di un grande piatto metallico, avente carica negativa in eccesso con densità di carica superficiale $2.0 \cdot 10^{-6}\,C/m^2$. Se l'energia cinetica iniziale dell'elettrone fosse di $100\,eV$ e se dovesse fermarsi (a causa della repulsione elettrostatica) proprio prima di raggiungere il piatto, trovare la distanza da cui viene proiettato.

Soluzione. Il campo elettrico nei punti appena al di fuori del piatto carico è pari a

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{2.0\cdot10^{-6}\,\frac{C}{m^2}}{8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}=2.3\cdot10^5\,\frac{N}{C}$$

L'energia cinetica dell'elettrone è pari a $100\,eV=1.6\cdot10^{-17}\,J$. Tale energia è pari al lavoro della forza elettrostatica in grado di fermare l'elettrone, per cui $\Delta K=F\Delta s$, da cui

$$\Delta s=\frac{\Delta K}{Ee}=\frac{1.6\cdot10^{-17}\,J}{2.3\cdot10^5\,\frac{N}{C}\cdot1.6\cdot10^{-19}\,C}=4.4\cdot10^{-4}\,m$$

Esercizio 100. Due grandi piatti metallici di area $1.0\,m^2$ si affacciano l'un l'altro. Si trovano a una distanza di $5.0\,cm$ e hanno cariche uguali ma di segno opposto sulle superfici interne. Se tra i piatti $E=55\,N/C$, trovare l'intensità delle cariche sui piatti. (si trascuri l'effetto di bordo).

Soluzione. All'interno dei due piatti, il campo elettrico generato da ogni singolo piatto ha la stessa direzione e, quindi, i due contributi si sommano. Pertanto,

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

cioè,

$$\sigma=\varepsilon_0E=8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\cdot55\,\frac{N}{C}=4.9\cdot10^{-10}\,\frac{C}{m^2}$$

Ora, poiché $\sigma=\frac{q}{A}$, avremo

$$q=4.9\cdot10^{-10}\,\frac{C}{m^2}\cdot1.0\,m^2=4.9\cdot10^{-10}\,C$$

Esercizio 101. In un esperimento di laboratorio il peso di un elettrone è esattamente bilanciato dalla forza esercitata sull'elettrone da un campo elettrico. Se il campo è generato dalla carica immessa su due grandi piatti paralleli conduttori, caricati con segno opposto e posti a una distanza di $2.3\,cm$ l'uno dall'altro, trovare la densità di carica superficiale, assunta uniforme, sui piatti, e la direzione di detto campo.

Soluzione. Il peso di un elettrone è dato da $P=mg$; in tale caso, la forza esercitata dal campo deve essere uguale a mg. Per cui,

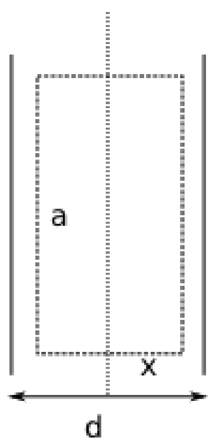
$$m_eg=eE=\frac{e\sigma}{\varepsilon_0}$$

Si può, pertanto, ricavare il valore di σ,

$$\sigma=\frac{m_eg\varepsilon_0}{e}=\frac{9.11\cdot10^{-31}\,kg\cdot9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}{1.60\cdot10^{-19}\,C}=4.9\cdot10^{-22}\,\frac{C}{m^2}$$

Affinché la forza elettrica equilibri la forza peso, diretta verso il basso, il campo dovrà essere diretto verso l'alto. Essendo la carica dell'elettrone negativa, cioè $q=-e$, il campo elettrico E dovrà essere diretto verso il basso.

Esercizio 102. Una lastra piana di spessore d ha una densità di carica volumica ρ uniforme. Determinare l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio sia internamente che esternamente alla lastra, in funzione di x, la distanza misurata dal piano mediano della lastra.



Soluzione. Possiamo usare una superficie Gaussiana a forma di parallelepipedo, (in figura lo schema della sezione della lastra e della superficie) tali che le di destra e sinistra siano quadrati di lato a. Il campo elettrico è perpendicolare alle facce quadrate ed è uniforme. Il campo avrà la stessa intensità sulle due facce uscente da quella sinistra e uscente da quella destra. Il campo avrà, pertanto, la stessa intensità. Il flusso del campo elettrico attraverso ogni faccia è Ea^2. Il campo sarà, inoltre, parallelo alle altre facce e quindi il flusso attraverso di esse sarà nullo. Il flusso totale sarà dato da

$$\Phi = 2Ea^2$$

Il volume racchiuso dalla superficie Gaussiana è $V = 2a^2x$ e la carica contenuta nella lastra di densità ρ sarà $q = 2a^2x\rho$. Applicando il teorema di Gauss si ha

$$2\varepsilon_0 Ea^2 = 2a^2x\rho$$

Il campo avrà quindi un'intensità

$$E = \frac{x\rho}{\varepsilon_0}$$

Esternamente alla lastra, è possibile assumere una superficie gaussiana simile e tale superficie contiene l'intera carica contenuta nella lastra; il campo è dato da

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

Esercizio 103. Un conduttore sferico di raggio $10\,cm$ ha una carica sconosciuta. Se il campo elettrico che si trova a $15\,cm$ dal centro della sfera è $3.0 \cdot 10^3\,N/C$ e si dirige radialmente verso l'interno, trovare la carica sulla sfera.

Soluzione. Il raggio della sfera è inferiore alla distanza alla quale è calcolato il campo elettrico; in questo caso, la carica si può considerare concentrata nel centro della sfera stessa. Il campo sarà pertanto descritto da

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ed, essendo diretto verso l'esterno, è generato da una carica negativa. Risolvendo rispetto alla carica, si ha

$$q = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E = 4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.15^2 \cdot 3.0 \cdot 10^3 = -7.5 \cdot 10^{-9}\,C$$

Esercizio 104. Una carica puntiforme forma un flusso di $-750\,Nm^2/C$ attraverso una superficie gaussiana sferica di $10.0\,cm$ di raggio, centrata sulla carica. Se il raggio della superficie gaussiana fosse doppio, quale sarebbe il flusso attraverso tale superficie e quale sarebbe il valore della carica puntiforme.

Soluzione. Il flusso del campo elettrico generato da una carica non varia al variare della superficie gaussiana, perché esso dipende solo dalla carica contenuta. Il flusso è definito da

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

da cui

$$q = \Phi\varepsilon_0 = -750\,\frac{Nm^2}{C} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2} = 6.64 \cdot 10^{-9}\,C$$

Esercizio 105. Un sottile guscio sferico metallico ha un raggio di $25\,cm$ e una carica di $2.0 \cdot 10^{-7}\,C$. Trovare E per un punto all'interno del guscio, appena al di fuori di esso e a $3.0\,m$ dal centro del guscio.

Soluzione. All'interno del guscio non è contenuta alcuna carica, per cui nel primo caso il campo sarà nullo. Il campo appena al di fuori del guscio sarà dato da

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2.0 \cdot 10^{-7}\,C}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.25^2} = 2.9 \cdot 10^4\,\frac{N}{C}$$

alla distanza di $3\,m$, la carica che genera il campo è ancora vista come puntiforme e il campo sarà

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2.0 \cdot 10^{-7}\,C}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 9} = 200\,\frac{N}{C}$$

Esercizio 106. Un sottile guscio sferico metallico di raggio a ha una carica q_a. Un secondo guscio metallico sferico concentrico con il primo e di raggio b (con $b > a$) ha una carica q_b. Calcolare il campo elettrico in un punto a distanza r dal centro con $r = a$, $a < r < b$ e $r > b$.

Esercizio. Nel primo caso la superficie sferica gaussiana è interna al guscio sferico e non racchiude alcuna carica, per cui $E_1 = 0$; nel caso in cui la superficie sia tra i due gusci contiene le cariche presenti sul guscio di raggio a e quindi $E_2 = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; infine nell'ultimo caso la superficie contiene entrambe cariche e il campo sarà la somma dei contributi di entrambi i gusci

$$E_3 = \frac{q_a + q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Esercizio 107. L'equazione $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ dà il campo elettrico nei punti vicini a una superficie conduttrice carica. Si applichi questa equazione a un conduttore sferico di raggio r e carica q e si mostri che il campo elettrico al di fuori della sfera è identico al campo di una carica puntiforme posta al centro della sfera.

Soluzione. La carica contenuta nella superficie carica è data da

$$q = \varepsilon_0 \Phi (E)$$

se assumiamo una superficie gaussiana sferica, il flusso, con E uguale in tutti i punti al di fuori e diretto radialmente è dato da

$$q = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E$$

da cui

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

e questa è la stessa relazione che descrive il campo elettrico generato da una carica puntiforme.

9. Calcolo del potenziale dato il campo elettrico

Esercizio 108. La differenza di potenziale elettrico tra il terreno e una nuvola durante un temporale è di $1.2{\cdot}10^9\,V$. Trovare la variazione in modulo dell'energia potenziale elettrica (in multipli dell'elettronvolt) di un elettrone che si muove tra questi due punti.

Soluzione: La forza elettrostatica è una forza conservativa, ed è quindi possibile assegnare ad un sistema di cariche una energia potenziale elettrica U, la cui variazione $\Delta U = -W$. Assumiamo che il sistema di riferimento quello in cui le cariche sono infinitamente distanti tra loro e assegniamo a tale configurazione $U = 0$. Quindi, W sarà il lavoro delle forze elettrostatiche per avvicinare le cariche. Nel caso di una singola carica, generatrice del campo elettrico, essendo, per definizione, $W = F\Delta s$, possiamo scrivere $\Delta U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r}$. Il potenziale elettrico è il rapporto tra l'energia potenziale e la quantità di carica, cioè $V = \frac{U}{q}$ e $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$, per cui, considerando un solo elettrone, avremo

$$\Delta U = e\Delta V = 1 \times 1.2 \cdot 10^9\,V = 1.2\,GeV$$

Esercizio 109. Una data batteria per auto da $12\,V$ può far fluire una carica totale di $84\,Ah$ attraverso un circuito, da un polo all'altro. Trovare la carica, in coulomb, corrispondente e, se tutta la carica subisce una differenza di potenziale di $12\,V$, l'energia che viene utilizzata.

Soluzione: Dalla definizione di intensità di corrente abbiamo

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad \Delta q = i\Delta t$$

ne segue che $1\,C = 1\,A \times s$ e quindi

$$84\,\frac{C \cdot h}{s} \times \frac{3600\,s}{h} = 302400\,C$$

l'energia utilizzata è pari a

$$\Delta U = \Delta V \cdot \Delta q = 12\,V \times 302400\,C = 3.63 \cdot 10^6\,J$$

Esercizio 110. Si supponga che in un lampo la differenza di potenziale tra nuvole e terreno sia si $1.0 \cdot 10^9\,V$ e la quantità di carica trasferita sia $30\,C$. Trovare l'energia trasferita con quella carica. Se tutta l'energia rilasciata venisse utilizzata per accelerare un'automobile di $1000\,kg$ inizialmente a riposo, trovare la sua velocità finale. Se tale energia venisse impiegata per fondere ghiaccio, quanto ne fonderebbe a $0^\circ\,C$? (Il calore latente di fusione del ghiaccio è $3.3 \cdot 10^5\,J/kg$.

Soluzione: L'energia potenziale elettrica è data da

$$U = Vq = 1.0 \cdot 10^9\,V \times 30\,C = 3.0 \cdot 10^{10}\,J$$

Se tale energia potenziale si trasforma interamente in energia cinetica ($\Delta U = \Delta K = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right)$) per l'automobile, la sua velocità finale sarà, essendo $v_i = 0$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}} = \sqrt{\frac{6.0 \cdot 10^{10}\,J}{10^3\,kg}} = 7.7 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}$$

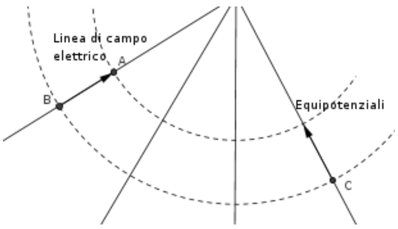
La quantità di ghiaccio che passa allo stato liquido a 0° C è data da

$$Q = Lm$$

dove L è il calore latente in questo caso

$$m = \frac{3.0 \cdot 10^{10}\,J}{3.3 \cdot 10^5\,\frac{J}{kg}} = 9.1 \cdot 10^4\,kg$$

Esercizio 111. Un elettrone si sposta dal punto A al punto B, come mostrato in figura. Il campo elettrico svolge un lavoro di $3.94 \cdot 10^{-19}\,J$ su di esso. Trovare le differenze di potenziale elettrico $V_B - V_A$, $V_C - V_A$, $V_C - V_B$.



Soluzione: Il potenziale elettrostatico è definito come il rapporto tra l'energia potenziale e la carica (non generatrice del campo). Tra i punti A e B la differenza di potenziale sarà pari al lavoro fatto dal campo sulla carica, cioè

$$\Delta V_{B-A} = \frac{3.94 \cdot 10^{-19}\,J}{1.602 \cdot 10^{-19}\,C} = -2.46\,V$$

il segno negativo è perché si passa da un potenziale minore a uno maggiore (come indicato dalla freccia). Il punto C appartiene alla stessa superficie equipotenziale del punto B, per cui $\Delta_{C-A} = 2.46\,V$, mentre i punti C e B stanno sulla stessa superficie equipotenziale, per cui, essendo la forza elettrostatica conservativa, $\Delta_{C-B} = 0\,V$.

Esercizio 112. Nell'esperimento di Millikan con le goccioline d'olio, un campo elettrico di $1.92 \cdot 10^5\,N/C$ viene instaurato tra due piani a una distanza di $1.50\,cm$. Trovare la differenza di potenziale tra i due piani.

Soluzione: La differenza di potenziale può essere espressa in funzione del campo elettrico come

$$\Delta V = Er = 1.92 \cdot 10^5\,\frac{N}{C} \times 1.50 \cdot 10^{-2}\,m = 2.88 \cdot 10^3\,V$$

Esercizio 113. Due grandi piatti paralleli conduttori vengono posti a una distanza di $12\,cm$ l'uno dall'altro e sulle loro superfici sono presenti cariche uguale e opposte. Un elettrone posto a metà strada tra i due piatti è soggetto a una forza di $3.9 \cdot 10^{-15}\,N$. (Si trascuri l'effetto ai bordi). Trovare il campo elettrico nella posizione dell'elettrone e la differenza di potenziale tra i due piatti.

Soluzione: L'elettrone è sottoposto all'azione delle cariche sul piatto negativo che lo attraggono e a quelle sul piatto positivo che lo attraggono. Avremo quindi una forza diretta verso le cariche positive di intensità doppia rispetto al caso della presenza di un solo tipo di carica. L'intensità del campo elettrico è data da

$$E = \frac{F}{e} = \frac{3.9 \cdot 10^{-15}\,N}{1.602 \cdot 10^{-19}\,C} = 2.4 \cdot 10^4\,\frac{N}{C}$$

la differenza di potenziale sarà

$$\Delta V = Er = 2.43 \cdot 10^4\,\frac{N}{C} \times 1.2 \cdot 10^{-1}\,m = 2.9 \cdot 10^3\,V$$

Esercizio 114. Un piano carico infinito ha una densità di carica $\sigma = 0.10\,\mu C/m^2$ su una faccia. Trovare la distanza alla quale si trovano le superfici equipotenziali il cui potenziale differisce di $50\,V$.

Soluzione: Il campo elettrico prodotto da un piano carico infinito è dato da

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Il campo è diretto perpendicolarmente al piano ed è uniforme. Fissiamo l'origine del sistema di coordinate sul piano e assumiamo l'asse x parallelo al campo e positivo nella direzione del campo. Il potenziale elettrico sarà

$$V = V_0 - Ex$$

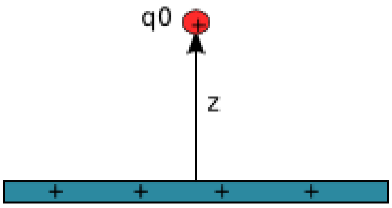
Le superfici equipotenziali sono superfici che stanno tutte alla stessa distanza dal piano e i cui punti hanno lo stesso potenziale. Se due superfici sono separata da una distanza Δx allora la differenza di potenziale tra di esse sarà

$$\Delta V = E\Delta x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \Delta x$$

Risolvendo rispetto a Δx, si ottiene

$$\Delta x = \frac{2 \times 50\,V \times 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}}{0.10 \cdot 10^{-6}\,C} = 8.8 \cdot 10^{-3}\,m = 8.8\,mm$$

Esercizio 115. La figura mostra un foglio infinito non conducente con densità di carica superficiale positiva σ su un lato. Trovare il lavoro fatto dal campo elettrico del foglio mentre una piccola carica di prova q_0 viene spostata da una posizione iniziale sul foglio a una posizione finale posta a una distanza z dal foglio.



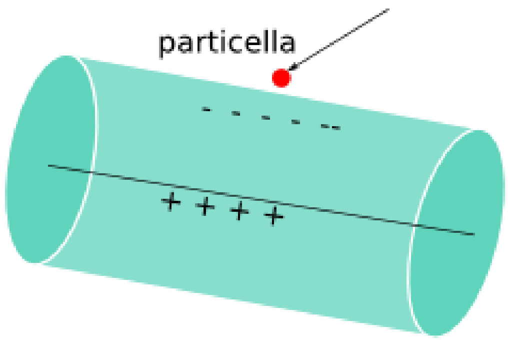
Soluzione: Il campo elettrico dovuto ad un foglio infinito è dato da

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Il lavoro può essere espresso come il prodotto scalare della forza per lo spostamento; in questo caso la forza è $F = Eq_0$ e lo spostamento è z. Pertanto,

$$L = F \cdot \Delta s = \frac{q_0 \sigma z}{2\varepsilon_0}$$

Esercizio 116. Un contatore Geiger è costituito da un cilindro metallico avente diametro di $2.00\,cm$, lungo il cui asse viene teso un filo avente diametro $1.30 \cdot 10^{-4}\,cm$. Si assuma che tra il cilindro e il filo venga applicata una tensione di $850\,V$. Trovare il campo elettrico sulla superficie del filo e del cilindro.



Soluzione: Applicando il teorema di Gauss su una superficie cilindrica coincidente con il cilindro metallico del Geiger (si vedano gli esercizi nel file campo elettrico) si ottiene che il campo elettrico è dato da

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

sapendo che $\Delta V=-\int_i^f Edr$, si ottiene

$$\Delta V=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_f^i\frac{dr}{r}=Er\left(\ln r\right)_f^i=Er\ln\frac{r_i}{r_f}$$

Se ora vogliamo calcolare il campo elettrico sulla superficie del Geiger, $r=r_f=0.01\,m$ e si avrà

$$E_{cil}=\frac{850\,V}{0.01\,m\cdot\ln\frac{6.5\cdot10^{-7}}{0.01}}=8.83\cdot10^3\,\frac{V}{m}$$

se invece calcoliamo il campo elettrico sul filo, $r=r_i=6.5\cdot10^{-7}\,m$ e si avrà

$$E_{cil}=\frac{850\,V}{6.5\cdot10^{-7}\,m\cdot\ln\frac{6.5\cdot10^{-7}}{0.01}}=1.36\cdot10^8\,\frac{V}{m}$$

Esercizio 117. Il campo elettrico in una sfera isolante di raggio R, all'interno della quale vi sia una carica distribuita uniformemente, è diretto radialmente e ha un'intensità

$$E\left(r\right)=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Qui q (positiva o negativa) è la carica totale nella sfera ed r è la distanza dal centro della sfera. Trovare il potenziale $V\left(r\right)$ all'interno della sfera, assumendo $V=0$. Trovare poi la differenza di potenziale elettrico tra un punto della superficie e il centro della sfera. Se q è positiva determinare quale dei punti si trova al potenziale maggiore.

Soluzione: Nel primo caso si ha

$$V\left(r\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int rdr=-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

e la differenza di potenziale tra un punto della superficie e il centro sarà

$$\Delta V=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[r^2\right]_0^R=\frac{qR^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

e la carica è negativa, il potenziale avrà il valore massimo nel centro della sfera stessa.

Esercizio 118. La carica q è distribuita uniformemente nel volume di una sfera avente raggio R. Se il potenziale è nullo all'infinito, dimostrare che il potenziale a una distanza r dal centro, dove $r<R$, è dato da

$$V=\frac{q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Soluzione: Usiamo il teorema di Gauss per trovare il campo elettrico dentro e fuori la distribuzione di carica sferica. Poiché il campo è diretto radialmente il potenziale elettrico sarà l'integrale del campo lungo il raggio della sfera esteso all'infinito. L'integrale dovrà essere diviso in due parti per tenere conto delle diverse regioni, una dall'infinito alla superficie e l'altra dalla superficie a un punto interno. All'esterno il campo è dato da $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ e il potenziale è $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, dove r è la distanza dal centro della sfera (la carica è vista come puntiforme). Per trovare il campo elettrico all'interno della sfera, scegliamo una superficie gaussiana sferica di raggio r, concentrica alla distribuzione. Il campo è perpendicolare alla superficie ed è uniforme e il flusso attraverso la superficie è $\Phi\left(E\right)=4\pi\varepsilon r_o^2E$. La carica distribuita dipende dal volume della sfera e sarà qr^3/R^3 . Applicando il teorema di Gauss si ha

$$4\pi\varepsilon_0 r^2E=\frac{qr^3}{R^3}\qquad E=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Se V_s è il potenziale sulla superficie della distribuzione ($r=R$) allora il pontenziale in un punto interno sarà

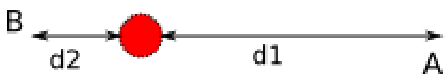
$$V=V_s-\int_R^r Edr=V_s-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_R^r rdr=V_s-\left(r^2\right)_R^r=V_s-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}+\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

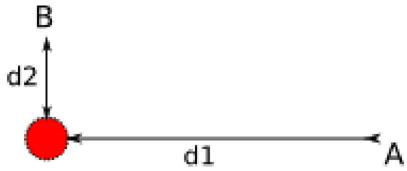
Calcoliamo V_s dalla relazione $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; ponendo $r=R$, si ha $V_s=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ e sostituendo

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}+\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{2qR^2-qr^2+qR^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{3qR^2-qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

10. Potenziale dovuto a cariche puntiformi

Esercizio 119. Una carica puntiforme q vale $+1.0\,\mu C$. Si consideri il punto A, posto a una distanza di $2.0\,m$ e il punto B, posto a una distanza di $1.0\,m$. Se i due punti si trovano in direzione diametralmente opposta, come nella figura di sinistra, trovare la differenza di potenziale $V_A - V_B$. Determinare la differenza di potenziale quando i punti A e B sono disposti come nella figura a destra.





Soluzione: Il potenziale elettrico attorno ad una carica positiva puntiforme, rispetto al potenziale nulla a distanza infinita, è dato da

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Essendo la carica positiva, il campo elettrico è diretto radialmente dalla carica verso l'esterno. Consideriamo il caso mostrato nella figura di sinistra. Il potenziale V_A e V_B è uguale a

$$V_A = \frac{1.0 \cdot 10^{-6}\,C}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2} \cdot 2.0\,m} = 4496\,V \qquad V_B = \frac{1.0 \cdot 10^{-6}\,C}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2} \cdot 1.0\,m} = 8992$$

Il potenziale in qualsiasi punto vicino a una carica positiva è positivo, rispetto al potenziale all'infinito. Pertanto

$$V_A - V_B = 4496 - 8992 = -4496\,V$$

Nel caso illustrato dalla figura di destra, la differenza di potenziale è la stessa, perché i punti A e B stanno sulle stesse superfici equipotenziali attorno alla carica $+q$.

Esercizio 120. Si consideri una carica puntiforme $q = 1.5 \cdot 10^{-8}\,C$, e $V = 0$ all'infinito. Indicare la forma e la dimensione di una superficie equipotenziale avente un potenziale di $30\,V$ dovuto soltanto a q. Le superfici i cui potenziali differiscono per una costante sono distanziate in modo disparato?

Soluzione: Calcoliamo il raggio della superficie sferica equipotenziale attorno alla sola carica puntiforme. Da $V = k_0\frac{q}{r}$, otteniamo

$$r = \frac{k_0 q}{V} = \frac{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot 1.5 \cdot 10^{-8}\,C}{30\,\frac{Nm}{C}} = 4.50\,m$$

La dipendenza tra V e r è di proporzionalità inversa, per cui le superfici risulteranno sempre più spaziate al crescere di r.

Esercizio 121. Trovare il potenziale che raggiunge una sfera conduttrice isolata di raggio $16.0\,cm$ con una carica di $1.50 \cdot 10^{-8}\,C$ con $V = 0$ all'infinito.

Soluzione: Il potenziale di una sfera conduttrice isolata è espresso da

$$V = k_0\frac{q}{r} = \frac{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot 1.50 \cdot 10^{-8}\,C}{0.16\,m} = 843\,V$$

Esercizio 122. Quando una navicella spaziale si muove nel gas ionizzato rarefatto della ionosfera terrestre, il suo potenziale varia tipicamente di $-1.0\,V$ per ogni rivoluzione. Assumendo che la navicella sia una sfera di raggio $10\,m$, stimare la quantità di carica che raccoglie.

Soluzione: Sostituiamo i dati indicati nella relazione che esprime il potenziale sulla superficie di una sfera:

$$q = \frac{Vr}{k_0} = \frac{-1.0\,V \times 10\,m}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = -1.1 \cdot 10^{-9}\,C$$

Esercizio 123. Molti dei materiali che costituiscono gli anelli si Saturno hanno la forma di minuscole particelle di polvere di raggio $10^{-6}\,m$. Questi granelli si trovano in una regione che contiene un gas ionizzato rarefatto e raccolgono elettroni in eccesso. Si supponga, in via approssimativa, che un granello sia sferico, con raggio $R = 1.0 \cdot 10^{-6}\,m$. Se il potenziale elettrico sulla superficie di un granello è di $-400\,V$, trovare il numero di elettroni in eccesso raccolti (considerando $V = 0$ all'infinito).

Soluzione: Troviamo prima la carica che viene raccolta

$$q = \frac{Vr}{k_0} = \frac{-400\,V \times 1.0 \cdot 10^{-6}\,m}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = -4.4 \cdot 10^{-14}\,C$$

e ricordando il valore della carica di un elettrone, otteniamo il numero di tali particelle

$$n = \frac{-4.4 \cdot 10^{-14}\,C}{-1.6 \cdot 10^{-19}\,C} = 2.8 \cdot 10^5$$

Esercizio 124. Trovare la carica e la densità di carica sulla superficie di un contenitore sferico di raggio $0.15\,m$ il cui potenziale è $200\,V$ (con $V = 0$ all'infinito).

Soluzione: Troviamo la quantità di carica sulla superficie

$$q = \frac{Vr}{k_0} = \frac{200\,V \times 0.15\,m}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = 3.34 \cdot 10^{-9}\,C$$

La superficie di una sfera è $4\pi r^2$ e supponendo la carica uniformemente distribuita avremo

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{2.34 \cdot 10^{-9}\,C}{4\pi \times 0.15^2\,m^2} = 1.18 \cdot 10^{-8}\,\frac{C}{m^2}$$

Esercizio 125. Una goccia d'acqua sferica su cui è presente una carica di $30\,pC$ ha un potenziale di $500\,V$ sulla superficie (con $V = 0$ all'infinito). Trovare il raggio della goccia. Se due gocce simili, aventi stessa carica e stesso raggio, si combinano per formare un'unica goccia sferica, trovare il potenziale sulla superficie della nuova goccia così formata.

Soluzione: Calcoliamo il raggio della goccia singola:

$$r = \frac{qk_0}{V} = \frac{30 \cdot 10^{-12}\,C \times 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}{500\,V} = 5.4 \cdot 10^{-4}\,m$$

Se uniamo le due gocce per formarne una sola, questa avrà un volume doppio di raggio r' tale che $r'^3 = 2r^3$ e una carica doppia, $q' = 2q$, per cui $r' = r\sqrt[3]{2}$e il potenziale diverrà ($V' = k_0\frac{q'}{r'} = k_0\frac{2q}{r\sqrt[3]{2}} = \frac{2V}{\sqrt[3]{2}}$)

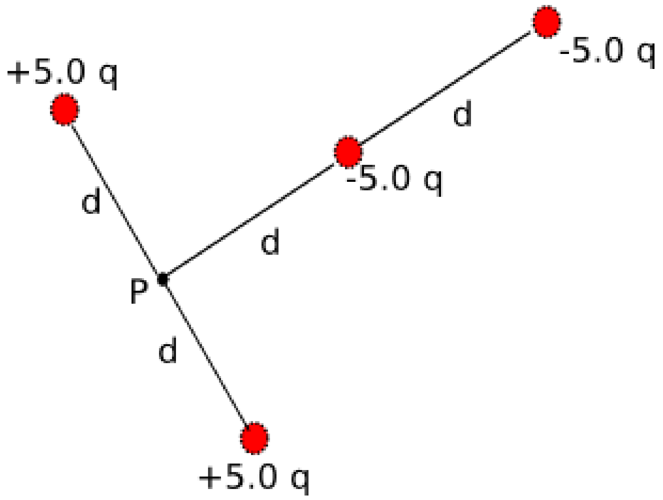
$$V' = \frac{2V}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1000\,V}{\sqrt[3]{2}} = 793\,V$$

Esercizio 126. Un campo elettrico di circa $100\,V/m$ viene spesso osservato sulla superficie della Terra. Se questo campo fosse costante sull'intera superficie, trovare il potenziale elettrico in un punto di essa. (Su supponga $V = 0$ all'infinito).

Soluzione: Considerando la superficie della Terra con una distribuzione di carica uniforme, possiamo applicare la relazione che lega il campo elettrico al potenziale, assumendo come distanza dal centro il raggio terrestre.

$$V = Er = 6.37 \cdot 10^6\,m \times 100\,\frac{V}{m} = 6.37 \cdot 10^8\,V$$

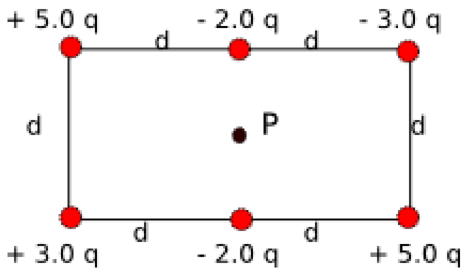
Esercizio 127. Determinare il potenziale netto nel punto P, in figura, dovuto alle quattro cariche puntiformi se $V = 0$ è all'infinito.



Soluzione: Il potenziale nel punto P è determinato mediante il principio di sovrapposizione, secondo il quale il potenziale netto è la somma dei potenziali, tenendo conte del segno, dovuti alla presenza di ogni carica considerata come sola. Pertanto

$$V = -k_0 \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{r_i} = -k_0 \left(\frac{+5.0q}{d} + \frac{+5.0q}{d} + \frac{-5.0q}{d} + \frac{-5.0q}{2d} \right) = k_0 \frac{-5q}{2d}$$

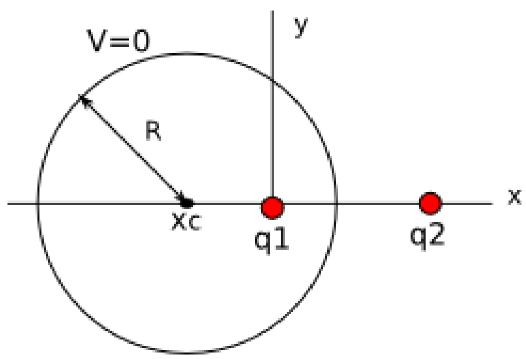
Esercizio 128. Nella figura il punto P è al centro del rettangolo. Con $V = 0$ all'infinito, trovare il potenziale generato dalle sei cariche puntiformi nel punto P.



Soluzione: Il potenziale nel punto P è determinato mediante il principio di sovrapposizione, secondo il quale il potenziale netto è la somma dei potenziali, tenendo conte del segno, dovuti alla presenza di ogni carica considerata come sola. Pertanto, calcolando la distanza dei vertici del rettangolo dal punto P mediante il teorema di Pitagora, $\sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}} = \frac{d}{2}\sqrt{5}$, si ha

$$V = -qk_0 \left(\frac{+5.0}{\frac{d}{2}\sqrt{5}} + \frac{+3.0}{\frac{d}{2}\sqrt{5}} + \frac{-3.0}{\frac{d}{2}\sqrt{5}} + \frac{+5.0}{\frac{d}{2}\sqrt{5}} + \frac{-2.0}{\frac{d}{2}} + \frac{-2.0}{\frac{d}{2}} \right) = -qk_0 \left(\frac{20}{d\sqrt{5}} - \frac{8}{d} \right) = -qk_0 \left(\frac{4\sqrt{5}}{d} - \frac{8}{d} \right) = -k_0 \frac{0.94q}{d}$$

Esercizio 129. Una carica puntiforme $q_1 = +6.0e$ viene tenuta fissa nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane. Una seconda carica $q_2 = -10e$ viene fissata in $x = 8.6\,nm$, $y = 0$. Il luogo dei punti del piano xy nei quali $V = 0$ (che non siano all'infinito) è una circonferenza centrata sull'asse x, come in figura. Trovare la posizione di x_c del centro della circonferenza e il raggio R di tale circonferenza.



Soluzione: L'esercizio chiede di determinare due quantità incognite. Per ottenere tale risultato, calcoliamo il potenziale in due punti distinti appartenenti all'asse x e alla circonferenza i cui punti si trovano tutti a potenziale $V = 0$. Per comodità, indichiamo la distanza di q_2 dall'origine con d e indichiamo le intersezioni della circonferenza con l'asse x con A ($x > 0$) e B ($x < 0$). Il potenziale dovuto ad entrambe le cariche nel punto B sarà

$$V_B = -k_0 e\left(\frac{6.0}{R+x_C} + \frac{-10}{R+x_C+d}\right) = 0$$

da cui

$$6.0\,(R+x_C+d) = 10\,(R+x_C) \qquad 4\,(R+x_C) = 6d$$

Calcoliamo ora il potenziale nel punto A

$$V_B = -k_0 e\left(\frac{6.0}{R-x_C} + \frac{-10}{d-(R-x_C)}\right) = 0$$

da cui

$$6.0\,[d-(R-x_C)] = 10\,(R-x_C) \qquad 6d = 16\,(R-x_C)$$

Mettiamo ora a sistema le due equazioni nelle incognite x_C e R

$$\begin{cases} 2R+2x_C = 3d \\ 8R-8x_C = 3d \end{cases} \qquad \begin{cases} 16R = 15d \\ 2x_C = 3d - \frac{15}{8}d = \frac{9}{8}d \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \frac{15}{16}d \\ x_C = \frac{9}{16}d \end{cases}$$

Sostituendo ora il valori di d e, osservando dalla figura che $x_C < 0$, si ha

$$x_C = -4.8\,nm \qquad R = 8.1\,nm$$

Esercizio 130. Una sfera di rame di raggio $1.0\,cm$. è ricoperta da uno strato sottile di nichel. Alcuni atomi di nichel sono radioattivi, ed emettono un elettrone quando decadono. Metà di questi elettroni entrano nella sfera, depositando ciascuno $100\,keV$ di energia. L'altra metà di elettroni se ne va, trasportando ciascuno una carica $-e$. Lo strato di nichel ha un'attività di $3.70 \cdot 10^8\,Bq$. La sfera è appesa a un lungo filo conduttore e isolata da tutto ciò che la circonda. Trovare il tempo necessario affinché il potenziale della sfera aumenti fino a $1000\,V$ e il tempo affinché la temperatura della sfera aumenti di $5.0\,^\circ C$, sapendo che la capacità termica della sfera è $14.3\,J/K$.

Soluzione: L'attività degli atomi del nucleo indica che ogni secondo sulla sfera vengono depositati $1.85 \cdot 10^8$ elettroni. Affinché il potenziale assuma il valore di $1000\,V$ la carica necessaria è

$$q = \frac{Vr}{k_0} = \frac{1000\,V \times 0.01\,m}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = 1.11 \cdot 10^{-9}\,C$$

pari a n_e elettroni di carica $1.60 \cdot 10^{-19}\,C$

$$n_e = \frac{1.11 \cdot 10^{-9}\,C}{1.60 \cdot 10^{-19}\,\frac{C}{s}} = 6.94 \cdot 10^9$$

il tempo necessario sarà quindi

$$\Delta t = \frac{6.94 \cdot 10^9}{1.85 \cdot 10^8\,s^{-1}} = 38\,s$$

Per determinare la quantità di energia necessario all'aumento della temperatura di $5.0\,^\circ C$, utilizziamo la relazione della calorimetria $\Delta E = C\Delta T$, dove, in questo caso, C esprime la capacità del corpo. Pertanto, se $\Delta T = 5.0\,^\circ C\,(= K)$ si avrà

$$\Delta E = 14.3\,\frac{J}{K} \times 5.0\,K = 71.5\,J = 71.5 \times 6.242 \cdot 10^{18}\,eV = 4.46 \cdot 10^{20}\,eV = 4.46 \cdot 10^{17}\,keV$$

Per depositare una tale quantità di energia servono $4.46 \cdot 10^{15}$ elettroni e il tempo necessario sarà

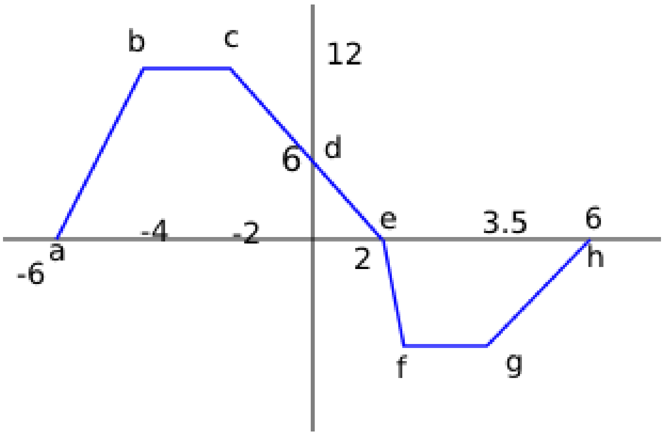
$$\Delta t = \frac{4.46 \cdot 10^{15}}{1.85 \cdot 10^8\,s^{-1}} = 2.41 \cdot 10^7\,s$$

Esercizio 131. La molecola di ammoniaca NH_3 ha un momento di dipolo elettrico permanente, p, pari a $1.47D$, dove D è l'unità debye del valore di $3.34\cdot 10^{-30}\,C\cdot m$. Calcolare il potenziale elettrico associato a una molecola di ammoniaca in un punto che si trova a una distanza di $52.0\,nm$ dall'asse del dipolo. (Si ponga $V=0$ all'infinito).

Soluzione: Il potenziale elettrico del dipolo in questione è dato da

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}=8.99\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{1.47\times 3.34\cdot 10^{-30}\,C\cdot m}{\left(52\cdot 10^{-9}\right)^2\,m^2}=1.63\cdot 10^{-5}\,V$$

Esercizio 132. Si supponga che il potenziale elettrico lungo l'asse x segua l'andamento mostrato in figura. Per i tratti illustrati $ab, bc, cd, de, ef, fg, gh$, si determini la componente x del campo elettrico. (Si ignori il comportamento nei punti estremi dei segmenti).



Soluzione: Indichiamo, per chiarezza, le coordinate dei diversi punti. $a\,(-6;0)$, $b\,(-4,12)$, $c\,(-2,12)$, $d\,(0,6)$, $e\,(2,0)$, $f\,(2.5,-7.5)$, $g\,(3.5,-7.5)$, $h\,(6,0)$. Il campo elettrico lungo la direzione x è la derivata, cambiata di segno, del potenziale rispetto alla distanza lungo x. Pertanto, dall'analisi, sappiamo che nel caso di rette o di segmenti di retta, la derivata è il coefficiente angolare di tale retta

$$E_{a,b}=-\frac{12-0}{-4+6}=-6\,\frac{V}{m}\qquad E_{b,c}=-\tfrac{12-12}{-2+4}=0\,\tfrac{V}{m}\qquad E_{c,d}=-\frac{0-12}{2+2}=3\,\frac{V}{m}$$

$$E_{d,e}=-\frac{0-6}{2-0}=3\,\frac{V}{m}\qquad E_{e,f}=-\tfrac{-7.5-0}{2.5-2}=-15\,\tfrac{V}{m}\qquad E_{f,g}=-\frac{-7.5+7.5}{-4.5+2.5}=0\,\frac{V}{m}$$

$$E_{g,h}=-\frac{0+7.5}{6-3.5}=-3\,\frac{V}{m}$$

Esercizio 133. Rutherford calcolò il potenziale elettrico in funzione della distanza r dal centro di un atomo ottenendo

$$V=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3}\right)$$

Si dimostri che la relazione che esprime il campo elettrico, $E=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{R^3}\right)$ discenda correttamente da questa espressione di V. Perché questa espressione di V non va a zero quando $r\to\infty$?

Soluzione: La dimostrazione è puramente matematica, ricordando il legame che intercorre tra campo elettrico e potenziale, cioè

$$E=-\frac{dV}{dr}$$

cioè il campo elettrico è la derivata rispetto a r del potenziale. Calcoliamo, pertanto, la derivata della funzione $V\,(r)$ assegnata, con R costante.

$$E=-\frac{dV}{dr}=-\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3}\right)=-\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{2r}{2R^3}\right)=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2r}{2R^3}\right)$$

per valutare il comportamento del potenziale per $r\to\infty$, calcoliamo il limite della $V\,(r)$:

$$\lim_{r\to\infty}V=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3}\right)=+\infty$$

11. Energia Potenziale Elettrica

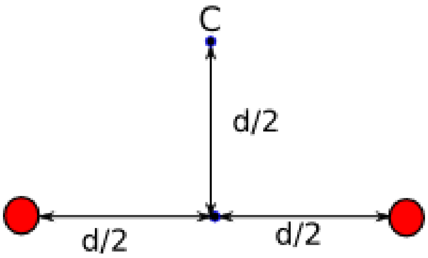
Esercizio 134. Trovare l'energia potenziale elettrica di due elettroni separati da una distanza di $2.0\,nm$. Aumentando la distanza, l'energia potenziale aumenta o diminuisce?

Soluzione. Le due particelle cariche hanno lo stesso segno per cui si deve compiere lavoro positivo per mantenerle nella condizione indicata. L'energia potenziale sarà

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\left(1.60\cdot10^{-19}\right)C^2}{2.0\cdot10^{-9}\,m}=1.15\cdot10^{-19}\,J$$

L'espressione che esprime l'energia potenziale in funzione della posizione mostra che al crescere di r, l'energia diminuisce.

Esercizio 135. Due cariche $q=+.20\,\mu C$ sono fisse nello spazio a una distanza $d=2.0\,cm$, come mostrato in figura. Con $V=0$ all'infinito, trovare il potenziale elettrico nel punto C. Una terza carica identica alle precedenti viene portata lentamente dall'infinito nel punto C. Trovare il lavoro necessario. Trovare, infine, l'energia potenziale della configurazione quando anche la terza carica è al suo posto.



Soluzione. Il potenziale elettrico nel punto C si calcola applicando il principio di sovrapposizione, sommando cioè il potenziale in C relativo alle due cariche considerate sole. La distanza di ogni carica dal punto C può essere calcolata osservando che tale distanza è la diagonale di un quadrato di lato $d/2$, cioè $\frac{d}{2}\sqrt{2}$

$$V_C=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\frac{d}{2}\sqrt{2}}+\frac{q}{\frac{d}{2}\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{d\sqrt{2}}=\frac{2q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 d}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{2\sqrt{2}\times2.0\cdot10^{-6}\,C}{0.02\,m}=2.54\cdot10^6\,V$$

Se una terza carica q_3, uguale alle precedenti, viene portata nel punto C contro le forze del campo elettrico si compirà un lavoro positivo

$$L=U=qV=2.0\cdot10^{-6}\,C\times2.54\cdot10^6\,V=5.1\,J$$

Calcoliamo ora l'energia potenziale della configurazione con le tre cariche

$$U=U_{q_qq_2}+U_{q_1q_3}+U_{q_2q_3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{d}+\frac{q_1q_3}{\frac{d}{\sqrt{2}}}+\frac{q_2q_3}{\frac{d}{\sqrt{2}}}\right)$$

le cariche sono tutte uguali, per cui

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{d}+\frac{2\sqrt{2}q^2}{d}\right)=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(1+2\sqrt{2}\right)=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\left(1+2\sqrt{2}\right)\times\left(2.0\cdot10^{-6}\,C\right)^2}{0.02\,m}=6.9\,J$$

Esercizio 136. Le cariche e le loro coordinate in un piano xy sono: $q_1=+3.0\cdot10^{-6}\,C$, $x=3.5\,cm$, $y=+0.50\,cm$; e $q_2=-4.0\cdot10^{-6}\,C$, $x=-2.0\,cm$, $y=+1.5\,cm$. Trovare il lavoro che si deve compiere per collocare queste cariche nelle posizioni indicate, partendo dall'infinito.

Soluzione. Supponiamo che inizialmente lo spazio sia vuoto, per cui per spostare $q_1$nella posizione indicata non sarà richiesto alcun lavoro. Posizionata la carica q_1, per spostare la carica q_2 di segno opposto si dovrà compiere un lavoro contro le forze del campo (di tipo attrattivo). Il lavoro sarà quindi negativo. La distanza tra le due cariche è data da

$$r=\sqrt{(3.5+2.0)^2+(0.50-1.50)^2}=5.6\,cm$$

Il lavoro è espresso da

$$L=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\left(-12\cdot10^{-12}\right)C^2}{0.056\,m}=-1.9\,J$$

Esercizio 137. Si valuti sommariamente la massa dell'elettrone nel modo seguente: si assuma che l'elettrone sia composto da tre parti identiche portate dall'infinito e poste ai vertici di un triangolo equilatero con lati uguali al raggio classico dell'elettrone, $2.82\cdot10^{-15}\,m$. Trovare l'energia potenziale elettrica totale di questa disposizione. Si divida per c^2 e si confronti il risultato col valore della massa dell'elettrone, comunemente riconosciuto in $9.11\cdot10^{-31}\,kg$.

Soluzione. L'energia potenziale della configurazione di cariche illustrata è

$$U=U_{1,2}+U_{1,3}+U_{2,3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_1}+\frac{q_2q_3}{r_2}+\frac{q_2q_3}{r_3}\right)$$

ma $q_1=q_2=q_3$ e $r_1=r_2=r_3$, per cui

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^2}{9r}+\frac{e^2}{9r}+\frac{e^2}{9r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{3r}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\left(-1.602\cdot10^{-19}\right)C^2}{3\times2.82\cdot10^{-15}\,m}=2.72\cdot10^{-14}\,J$$

dividendo per c^2 si ottiene la massa (dalla relazione $E=mc^2$)

$$m=\frac{2.72\cdot10^{-14}\,J}{9.0\cdot10^{16}\,\frac{m^2}{s^2}}=3.02\cdot10^{-31}\,kg$$

Il valore ha lo stesso ordine di grandezza della massa nota ed è migliorabile aumentando il numero delle cariche che ipoteticamente formano l'elettrone.

Esercizio 138. Ricavare l'espressione per il lavoro necessario per disporre quattro cariche ai vertici di un quadrato di modo che agli estremi delle diagonali vi siano cariche di segno uguale anche se di valore uguale.

Soluzione. Siano $\pm q$ le intensità delle cariche e a il lato del quadrato, la cui diagonale sarà $d\sqrt{2}$. Il lavoro sarà

$$\begin{aligned}L &= U=U=U_{1,2}+U_{1,3}+U_{2,3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q^2}{a}+\frac{q^2}{a\sqrt{2}}+\frac{-q^2}{a}+\frac{-q^2}{a}+\frac{q^2}{a\sqrt{2}}+\frac{-q^2}{a}\right)\\ &= =\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{4q^2}{a}+\frac{q^2\sqrt{2}}{a}\right)=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\sqrt{2}-4\right)=-2.3\cdot10^{10}\,\frac{q^2}{a}\end{aligned}$$

Esercizio 139. Nel modello a quark per le particelle elementari, un protone è composto da tre quark: due quark *up*, avente ciascuno carica $2e/3$, e un quark *down*, avente carica $-e/3$. Si supponga che i tre quark siano equidistanti l'uno dall'altro di $1.32\cdot10^{-15}\,m$. Si calcoli l'energia potenziale del subsitema dei due quark e l'energia potenziale elettrica totale del sistema delle tre particelle.

Soluzione. Supponiamo che sia inizialmente presente il quark down. L'energia potenziale del subsistema sarà

$$\begin{aligned}U &= U_{d,u}+U_{d,u}=U_{1,2}+U_{1,3}+U_{2,3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2e^2}{9r}+\frac{-2e^2}{9r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-4e^2}{9r}=\\ &= 8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{-4\left(1.602\cdot10^{-19}\right)^2C^2}{9\times1.32\cdot10^{-15}\,m}=-7.75\cdot10^{-14}\,J=-0.48\,MeV\end{aligned}$$

L'energia potenziale elettrica di una tale configurazione sarà

$$U=U_{1,2}+U_{1,3}+U_{2,3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4e^2}{9r}+\frac{-2e^2}{9r}+\frac{-2e^2}{9r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(0)=0\,J$$

Esercizio 140. Tre cariche di $0.12\,C$ formano un triangolo equilatero di lato $1.7\,m$. Se si fornisce energia con potenza $0.83\,kW$, trovare il numero di giorni necessari per spostare una delle cariche nel punto medio del lato del triangolo ad essa opposto.

Soluzione. Il lavoro compiuto per spostare una carica è dato dalla variazione dell'energia potenziale

$$L=\Delta U=\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)=2\times0.12^2\,C^2\times8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{1}{0.85\,m}-\frac{1}{1.7\,m}\right)=1.5\cdot10^8\,J$$

La potenza è il rapporto tra il lavoro compiuto e l'intervallo di tempo, per cui

$$\Delta t=\frac{L}{P}=\frac{1.5\cdot10^8}{0.83\cdot10^3\,\frac{J}{s}}=183495\,s=2.1\,giorni$$

Esercizio 141. Nel rettangolo in figura, i lati misurano $5.0\,cm$ e $,15\,cm$, $q_1 = -5.0\,\mu C$ e $q_2 = +2.0\,\mu C$. Con $V = 0$ all'infinito, trovare i potenziali elettrici nei punti indicati con A e B. Trovare poi il lavoro necessario per spostare una terza carica $q_3 = +3.0\,\mu C$ da B ad A lungo una diagonale del rettangolo. Indicare se tale lavoro fa aumentare o diminuire l'energia elettrica dell'insieme delle tre cariche. Infine, se q_3 si spostasse lungo un percorso all'interno del rettangolo ma non sulla diagonale o fuori del rettangolo, indicare se il lavoro richiesto sarebbe uguale, maggiore o minore.

Soluzione. Calcoliamo il potenziale nel punto A

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-5.0\cdot 10^{-6}\,C}{0.15\,,m} + \frac{2.0\cdot 10^{-6}\,C}{0.05\,m}\right) = 6.0\cdot 10^4\,V$$

Calcoliamo il potenziale nel punto B

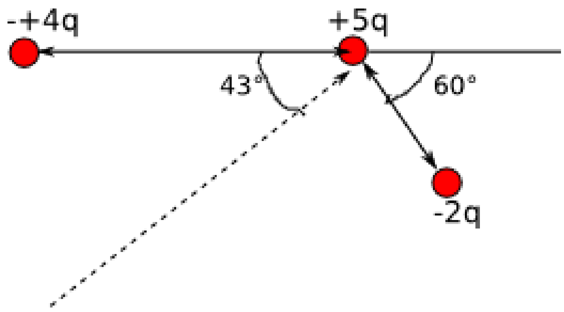
$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-5.0\cdot 10^{-6}\,C}{0.05\,,m} + \frac{2.0\cdot 10^{-6}\,C}{0.15\,m}\right) = -7.8\cdot 10^5\,V$$

Il lavoro necessario per portare una carica q_3 da B ad A è dato da

$$L = \Delta V q = (V_A - V_B)\,q_3 = \left(6.0\cdot 10^4\,V + 7.8\cdot 10^4\,V\right)\times 3.0\cdot 10^{-6}\,C = +2.5\,J$$

Il lavoro è positivo e, pertanto, fa aumentare l'energia elettrica del sistema di cariche; infine, tale lavoro non cambia al variare della traiettoria seguita dalla carica, poiché il campo elettrico è conservativo.

Esercizio 142. Trovare il lavoro richiesto per trasportare la carica $+5q$ dall'infinito lungo la linea tratteggiata in figura e per porla vicino alle due cariche fisse $+4q$ e $-2q$. Si ponga $d = 1.40\,cm$ e $q = 1.6\cdot 10^{-19}\,C$.



Soluzione. Per trovare il lavoro richiesto, supponiamo che, dapprima, il sistema sia composto dalle sole due cariche fisse. In tal caso, il potenziale nel punto in cui si dovrà trovare la terza carica è

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{6.4\cdot 10^{-19}\,C}{2.80\cdot 10^{-2}\,,m} + \frac{-3.2\cdot 10^{-19}\,C}{1.40\cdot 10^{-2}\,m}\right) = 0$$

Supponendo sempre $V(\infty) = 0$, osserviamo che la carica $+5q$ deve trovarsi in due punti che hanno lo stesso potenziale e pertanto $\Delta V = 0$ e, di conseguenza, si ha $L = 0$.

Esercizio 143. Una particella con carica positiva$Q$ viene tenuta fissa in un punto P. Una seconda particella di massa m e carica negativa $-q$ si muove a una velocità costante su una circonferenza di raggio r_1. centrata sul punto P. Ricavare un'espressione per il lavoro L che deve essere svolto da un agente esterno sulla seconda particella per aumentare il raggio della sua orbita fino a divenire r_2.

Soluzione. La configurazione è quella tipica del modello atomico introdotto da Rutherford, detto a sistema planetario. Il sistema ha un'energia totale iniziale data dalla somma dell'energia potenziale e di quella cinetica della carica ruotante. Queste due grandezze cambiano compiendo lavoro dall'esterno, ma la loro somma rimane costante, poiché il campo elettrico è conservativo. Troviamo un'espressione dell'energia totale in funzione del raggio r. La carica fissa Q esercita una forza centripeta sulla carica $-q$ che si muove di moto circolare uniforme. Applicando la seconda legge di Newton, possiamo scrivere

$$F_c = m\frac{v^2}{r} = F_e = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Da questa relazione possiamo ricavare

$$mv^2 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

L'energia cinetica della carica $-q$ è data da $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 r}$. La sua energia potenziale è $U = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$. L'energia totale sarà

$$E = K + U = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

Esercizio 144. Calcolare il potenziale elettrico generato dal nucleo di atomo di idrogeno alla distanza media in cui si trova l'elettrone ($r = 5.29 \cdot 10^{-11}\, m$). Trovare l'energia potenziale elettrica dell'atomo quando l'elettrone si trova a tale distanza radiale, e l'energia cinetica dell'elettrone, assumendo che si muova su un'orbita circolare di questo raggio centrata sul nucleo. Trovare, infine, l'energia richiesta per ionizzare l'atomo di idrogeno, esprimendo tutte le energie in eV.

Soluzione. Calcoliamo il potenziale elettrico dell'elettrone dalla sua definizione, cioè

$$V = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{8.99 \cdot 10^9 \times 1.60 \cdot 10^{-19}\, C}{5.29 \cdot 10^{-11}\, m} = 27.2\, V$$

L'energia potenziale del sistema protone(nucleo)-elettrone è data da

$$U = Ve^+ = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{8.99 \cdot 10^9 \times \left(1.60 \cdot 10^{-19}\right)^2\, C^2}{5.29 \cdot 10^{-11}\, m} = -4.35 \cdot 10^{-18}\, J = 4.35 \cdot 10^{-18}\, J \times 6.242 \cdot 10^{18}\, \frac{eV}{J} = -27.2\, eV$$

Dall'esempio precedente, possiamo calcolare l'energia cinetica dell'elettrone

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = 13.6\, eV$$

La ionizzazione dell'atomo avviene fornendo a questo elettrone un'energia almeno pari a $13.6\, eV$.

Esercizio 145. Una particella di carica $q = 3.1\, \mu C$ viene tenuta fissa in un punto P e una seconda particella di massa $m = 20\, mg$ e stessa carica q viene inizialmente tenuta a riposo a una distanza $r_1 = 0.90\, mm$ da P. La seconda particella viene poi rilasciata. Determinare la velocità quando si trova a una distanza $r_2 = 2.5\, mm$ da P.

Soluzione. Lo spostamento della carica dalla posizione iniziale a quella finale implica una variazione nell'energia potenziale del sistema. Tale variazione è data

$$\Delta U = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -8.99 \cdot 10^9 \times \left(3.1 \cdot 10^{-6}\right)^2\, C^2 \times \left(\frac{1}{2.5 \cdot 10^{-3}\, m} - \frac{1}{0.90 \cdot 10^{-3}\, m}\right) = 61.4\, J$$

Ma tale variazione dell'energia potenziale è uguale all'energia cinetica acquisita dalla carica mobile, il cui valore iniziale era zero. Pertanto,

$$\Delta U = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 61.4\, J}{20 \cdot 10^{-6}\, kg}} = 2.5 \cdot 10^3\, \frac{m}{s}$$

Esercizio 146. Una carica $Q = -9.0\, nC$ è uniformemente distribuita intorno a un anello di raggio $1.5\, m$ che giace sul piano yz con il centro nell'origine. Una carica puntiforme $q = -6.0\, pC$ viene posta sull'asse x a $x = 3.0\, m$. Calcolare il lavoro svolto per spostare la carica puntiforme fino all'origine.

Soluzione. Il lavoro è pari alla variazione dell'energia potenziale. Nel caso di un disco carico, essa è data da

$$L = \Delta U = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right) = 8.99 \cdot 10^9\, \frac{Nm^2}{C^2} \times 9.0 \cdot 10^{-9} \times 6.0 \cdot 10^{-12}\, C^2 \left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{\sqrt{2.25 + 9.0}}\right) m^{-1} = 1.8 \cdot 10^{-10}\, J$$

Esercizio 147. Due sferette metalliche A e B di massa $m_A = 5.00\,g$ e $m_B = 10.0\,g$ portano cariche positive uguali $q = 5.00\,\mu C$. Le sferette sono collegate con un filo privo di massa e di lunghezza $d = 1.00\,m$, molto maggiore del raggio della sferetta. Trovare l'energia potenziale elettrica del sistema. Togliendo il filo, trovare l'accelerazione di ogni sfera in quell'istante e la velocità di ciascuna di esse molto tempo dopo il taglio del filo.

Soluzione. L'energia potenziale elettrica è data da

$$U = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} = 8.99 \cdot 10^9 \, \frac{N}{m^2C^2} \times 25.0 \cdot 10^{-12}\, C^2 = 0.225\, J$$

Se il filo viene tagliato, le due sferette sono soggette ad una forza repulsiva di intensità uguale e contraria e l'accelerazione, applicando la seconda legge di Newton, sarà

$$ma = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{U}{d}$$

Le masse delle due sferette sono diverse, per cui, essendo $d = 1.00\,m$,

$$\begin{aligned} a_A &= \frac{U}{d}\frac{1}{m_A} = \frac{0.225\,J}{5.00 \cdot 10^{-3}\,kg} = 45.0\,\frac{m}{s^2} \\ a_B &= \frac{U}{d}\frac{1}{m_B} = \frac{0.225\,J}{1.00 \cdot 10^{-2}\,kg} = 22.5\,\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Dopo molto tempo dalla rottura del filo, possiamo supporre che l'effetto della forza sia trascurabile e che le sferette si muovano di moto rettilineo uniforme. Per calcolare la velocità osserviamo che l'intera energia potenziale si trasformerà in energia cinetica delle sferette, per cui

$$U = K_A + K_B = \frac{1}{2}\left(m_A v_A^2 + m_B v_B^2\right)$$

ma, $v_A = 2v_B$,

$$0.450 = 5.00 \cdot 10^{-3} \times v_A^2 + 1.00 \cdot 10^{-2}\,\frac{v_A^2}{4} = 7.50 \cdot 10^{-3} v_A^2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{0.450\,J}{7.50 \cdot 10^{-3}\,kg}} = 7.75\,\frac{m}{s}$$

e $v_B = -3.87\,\frac{m}{s}$. (Il segno meno rende conto del verso opposto di moto rispetto alla sferetta A).

Esercizio 148. Due superfici conduttrici parallele, piane, distanziate di $d = 1.00\,cm$ hanno una differenza di potenziale $\Delta V = 625\,V$. Un elettrone viene proiettato da un piatto verso l'altro. Trovare la velocità iniziale dell'elettrone se esso si ferma proprio sulla superficie del secondo piatto.

Soluzione. Il secondo piatto avrà una carica negativa che si oppone al moto dell'elettrone tanto da ridurre la sua velocità a zero nello spazio di $1.00\,cm$. Il lavoro per fermare l'elettrone è pari all'energia potenziale $U = \Delta V e = 625\,V \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C = 1.00 \cdot 10^{-16}\,J$. Tale lavoro è uguale alla variazione dell'energia cinetica dell'elettrone, per cui

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f - 0 = \frac{1}{2} m V_i^2$$

da cui

$$v_i = \sqrt{\frac{2.00 \cdot 10^{-16}}{9.11 \cdot 10^{-31}}} = 1.48 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 149. Un guscio sferico sottile non conducente, di raggio R viene montato su un supporto isolante e caricato a un potenziale $-V$. Un elettrone viene lanciato la un punto P a distanza r dal centro del guscio ($r \gg R$) con velocità iniziale v_0. diretto radialmente verso l'interno. Trovare il valore di v_0 affinché l'elettrone riesca a raggiungere esattamente l'involucro prima di tornare indietro.

Soluzione. La velocità iniziale viene azzerata a causa della forza repulsiva che agisce sull'elettrone, la cui energia cinetica si azzera. Il lavoro necessario è pari all'energia potenziale sull'involucro. Pertanto,

$$-Ve = \frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_0^2\right) = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

Possiamo, pertanto, ricavare la velocità

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Esercizio 150. Due elettroni sono tenuti fissi a $2.0\,cm$ di distanza. Un altro elettrone viene lanciato dall'infinito e si arresta a metà strada tra i due. Trovare la sua velocità iniziale.

Soluzione. Possiamo utilizzare la relazione dell'esercizio precedente che esprime $v_0 = f(V)$. Calcoliamo, dapprima, il potenziale nel punto medio del segmento che rappresenta la distanza tra le due cariche

$$V = \frac{2e}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{8.99 \cdot 10^9\,\frac{N}{m^2C^2} \times 2 \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C}{1.0 \cdot 10^{-2}\,m} = 2.9 \cdot 10^{-7}\,V$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 2.9 \cdot 10^{-7}\,V}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg}} = 319\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 151. Si consideri un elettrone sulla superficie di una sfera uniformemente carica di raggio $1.0\,cm$ e carica totale $1.6 \cdot 10^{-15}\,C$. Trovare la velocità iniziale che dovrà avere l'elettrone per raggiungere una distanza infinita dalla sfera con energia cinetica nulla.

Soluzione. L'elettrone deve possedere un'energia cinetica che gli consenta di vincere l'attrazione della sfera e quindi la velocità iniziale si può intendere come la velocità di fuga dalla sfera. Calcoliamo l'energia potenziale dell'elettrone

$$U = -\frac{qe^-}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{8.99 \cdot 10^9\,\frac{N}{m^2C^2} \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C \times 1.6 \cdot 10^{-15}\,C}{1.0 \cdot 10^{-2}\,m} = 2.3 \cdot 10^{-22}\,J$$

L'energia totale si conserva e il campo elettrico è conservativo, pertanto

$$2.3 \cdot 10^{-22}\,J = \frac{1}{2} \times 9.11 \cdot 10^{-31}\,kg \times v_0^2$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 2.3 \cdot 10^{-22}\,J}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg}} = 2.2 \cdot 10^4\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 152. Un elettrone viene lanciato con una velocità iniziale di $3.2 \cdot 10^5\,\frac{m}{s}$ direttamente verso un protone tenuto fisso in un punto. Se l'elettrone è inizialmente a una grande distanza dal protone, trovare la distanza dal protone alla quale la velocità istantanea dell'elettrone sarà uguale al doppio del sua valore iniziale.

Soluzione. Calcoliamo la variazione dell'energia cinetica dell'elettrone nelle due posizioni rispetto al protone fisso.

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_0^2\right)$$

se $v_f = 2v_0$, avremo

$$\Delta K = \frac{3}{2}mv_0^2$$

Uguagliamo sempre l'energia potenziale con la variazione dell'energia cinetica

$$U = \frac{3}{2}mv_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

da cui

$$r = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 3mv_0^2} = \frac{8.99 \cdot 10^9\,\frac{N}{m^2C^2} \times 2 \times \left(1.60 \cdot 10^{-19}\right)\,C^2}{3 \times 9.11 \cdot 10^{-31}\,kg \times \left(3.2 \cdot 10^5\right)^2\,\frac{m^2}{s^2}} = 1.6 \cdot 10^{-9}\,m$$

Esercizio 153. Una sfera metallica cava è caricata con un potenziale di $+400\,V$ rispetto al terreno ($V = 0$) e ha una carica di $5.0 \cdot 10^{-9}\,C$. Trovare il potenziale elettrico al centro della sfera.

Soluzione. Una carica in eccesso contenuta in un conduttore in equilibrio si dispone sulla superficie esterna del conduttore stesso. La carica porta l'intero conduttore, compresi i punti sulla superficie e quelli interni, a un potenziale uniforme. Da ciò segue che $V_{centro} = +400$V.

Esercizio 154. Trovare la carica di una sfera conduttrice di raggio $r = 0.15\,m$ se il potenziale della sfera è $1500\,V$ e $V(\infty) = 0$.

Soluzione. Esprimiamo il potenziale sulla superficie della sfera

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

da cui

$$q=4\pi\varepsilon_0 rV=\left(8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\right)^{-1}\times0.15\,m\times1500\,V=2.5\cdot10^{-8}\,C$$

Esercizio 155. I centri di due sfere metalliche, ciascuna di raggio $3.0\,cm$, sono separati di $2.0\,m$. Una ha carica $q_1=+1.0\cdot10^{-8}\,C$, l'altra $q_2=-3.0\cdot10^{-8}\,C$. Si assuma che la loro distanza sia abbastanza grande, rispetto alla loro dimensione, da considerare la loro carica uniformemente distribuita, Assumendo $V(\infty)=0$, calcolare il potenziale nel punto intermedio tra i loro centri e il potenziale elettrico di ciascuna sfera.

Soluzione. Nelle condizioni assegnate, il potenziale nel punto intermedio è calcolato mediante il principio di sovrapposizione:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{r}\right)=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\left(\frac{+1.0\cdot10^{-8}\,C}{1.0\,m}+\frac{-3.0\cdot10^{-8}\,C}{1.0\,m}\right)=-180\,V$$

Il potenziale di ogni sfera è

$$\begin{aligned}V_1&=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{+1.0\cdot10^{-8}\,C}{3.0\cdot10^{-2}m}=2997\,V\\V_2&=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{-3.0\cdot10^{-8}\,C}{3.0\cdot10^{-2}m}=-8990\,V\end{aligned}$$

Esercizio 156. Una sfera metallica avente raggio di $15\,cm$ ha una carica netta di $3.0\cdot10^{-8}\,C$. Trovare il campo elettrico sulla superficie della sfera. Se $V(\infty)=0$, trovare il potenziale elettrico sulla superficie della sfera e la distanza dalla superficie alla quale il potenziale elettrico diminuisce di $500\,V$.

Soluzione. Il campo elettrico è calcolato attraverso la legge di Gauss applicato ad una superficie gaussiano sferica:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{3.0\cdot10^{-8}\,C}{\left(15\cdot10^{-2}\right)^2m^2}=11987\,\frac{N}{C}\left(\frac{V}{m}\right)$$

il potenziale sulla superficie è

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{3.0\cdot10^{-8}\,C}{15\cdot10^{-2}m}=1800\,V$$

Se il potenziale si riduce di $500\,V$, avrà un valore pari a $1300\,V$, pertanto, ricavando la distanza r, avremo

$$V_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(R+r\right)}$$

da cui si ricava

$$r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V_r}-R=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{3.0\cdot10^{-8}\,C}{1300\,V}-0.15\,m=5.7\,cm$$

12. Corrente elettrica

Esercizio 157. Un elettrometro è uno strumento per misurare la carica statica. La carica viene posta sui piatti di un condensatore e viene misurata la differenza di potenziale. Trovare la carica minima che l'elettrometro può misurare se ha una capacità di $50\,pF$ e una sensibilità sulla misura di tensione di $0.15\,V$.

Soluzione. La sensibilità di uno strumento esprime la minima variazione della grandezza misurata che può essere valutata dallo strumento stesso. Pertanto, sapendo che

$$Q=CV$$

dove C è la capacità dell'elettrometro, si ha

$$Q=50\cdot10^{-12}\,F\times0.15\,V=7.5\cdot10^{-12}\,C$$

Esercizio 158. Due oggetti metallici hanno cariche nette di $+70\,pC$ e di $-70\,pC$; ciò si traduce in una differenza di potenziale tra di essi di $20\,V$. Trovare la capacità del sistema. Se le cariche vengono incrementate fino a $+200\,pC$ e $-200\,pC$, trovare la capacità e la differenza di potenziale in questa seconda condizione.

Soluzione. Troviamo la capacità nel primo caso

$$C = \frac{|Q|}{V} = \frac{70 \cdot 10^{-12}\, C}{20\, V} = 3.5 \cdot 10^{-12}\, F$$

All'aumentare della carica la capacità non varia, perché essa non dipende dalla quantità di carica accumulata ma solo da fattori geometrici di forma degli oggetti metallici. Pertanto, anche in questo caso avremo $C = 3.5 \cdot 10^{-12}\, C$. La differenza di potenziale nella seconda condizione sarà

$$V = \frac{|Q|}{C} = \frac{200 \cdot 10^{-12}\, C}{3.5 \cdot 10^{-12}\, F} = 57\, V$$

Esercizio 159. Un circuito essenziale è composto da una batteria, da un condensatore e da un interruttore. Il condensatore ha capacità di $25\, \mu F$ ed è inizialmente scarico. La batteria fornisce $120\, V$. Dopo la chiusura prolungata dell'interruttore, trovare la carica che ha attraversato la batteria.

Soluzione. Applichiamo la relazione tra carica, capacità e differenza di potenziale, risolvendola rispetto alla carica. Avremo

$$Q = CV = 25 \cdot 10^{-6}\, F \times 120\, V = 3.0\, mC$$

Esercizio 160. La capacità di un condensatore dipende dalla superficie delle armature, dalla distanza tra di esse e dal mezzo tra le armature (supponiamo per ora che sia il vuoto). La relazione è $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ (A superficie armatura, d distanza tra armature). Ricavare ε_0 e mostrare che questa unità è equivalente a quella usata nella definizione di forza e campo elettrico.

Soluzione. Dalla $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$, otteniamo

$$\varepsilon_0 = \frac{Cd}{A} \left[\frac{F}{m}\right]$$

Ora, la forza elettrica è data da $F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, da cui risulta che l'unità di misura di ε_0 è $\left[\frac{C^2}{Nm^2}\right]$. Scriviamo ora le equazioni dimensionali:

$$\frac{F}{m} = \frac{C}{Vm} \quad ma \quad V = \frac{Nm}{C}$$

pertanto

$$\frac{F}{m} = \frac{\frac{C}{Nm^2}}{C} = \frac{C^2}{Nm^2}$$

Esercizio 161. Un condensatore piano ha piatti circolari aventi raggio di $8.2\, cm$ distanti $1.3\, mm$ l'uno dall'altro. Calcolare la capacità e la carica che comparirà sui piatti se si applica una differenza di potenziale di $120\, V$.

Soluzione. La capacità di un condensatore dipende dalla sua geometria (tra i piatti supponiamo vi sia il vuoto) secondo la relazione

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8.85 \cdot 10^{-12}\, \frac{C}{Nm^2} \times \frac{\pi \left(8.2 \cdot 10^{-2}\right)^2 m^2}{1.3 \cdot 10^{-3}\, m} = 1.44 \cdot 10^{-10}\, F$$

La carica depositata sui piatti è data da

$$Q = CV = 1.44 \cdot 10^{-10}\, F \times 120\, V = 1.73 \cdot 10^{-8}\, C$$

Esercizio 162. Si hanno due piatti metallici piani, ciascuno di area $1.00\, m^2$, con i quali costruire un condensatore a piatti paralleli. Se la capacità è di $1.00\, F$, trovare la distanza tra i due piatti. Indicare se questo è un condensatore reale.

Soluzione. La capacità è data da $C=\varepsilon_0\frac{A}{d}$ per cui

$$d=\varepsilon_0\frac{A}{C}=8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}\times\frac{1.00m^2}{1.00\,F}=8.85\cdot10^{-12}\,m$$

Avremmo un condensatore di dimensioni e capacità notevoli con i piatti che dovrebbero distare molto meno delle dimensioni di un atomo. La sua realizzazione è quindi non realistica.

Esercizio 163. I piatti di un condensatore sferico hanno raggi di $38.0\,mm$ e $40.0\,mm$. Calcolare la sua capacità. Trovare poi quale dovrebbe essere l'area di un condensatore a piatti paralleli con una uguale distanza tra i piatti e uguale capacità.

Soluzione. Nel caso di un condensatore sferico con due piatti concentrici, la capacità si ricava tramite l'applicazione della legge di Gauss ed è espressa da

$$C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

dove a e b sono i raggi dei due piatti sferici. Sostituendo i valori assegnati delle grandezze, si ha

$$C=\left(8.99\cdot10^9\right)^{-1}\,\frac{C}{Nm^2}\times\frac{38.0\cdot10^{-3}\,m\times40.0\cdot10^{-3}\,m}{2.00\cdot10^{-3}\,m}=8.45\cdot10^{-11}\,F$$

Se questa capacità deve essere la stessa di un condensatore a piatti paralleli, questi dovranno avere un'area

$$A=\frac{Cd}{\varepsilon_0}=\frac{8.45\cdot10^{-11}\,F\times2.00\cdot10^{-3}\,m}{8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}}=1.91\cdot10^{-2}\,m^2$$

Esercizio 164. Dopo aver camminato in una giornata secca su un tappeto, toccate con la mano una maniglia metallica, e si sprigiona una scintilla di $5\,mm$. Questa scintilla indica che c'è una differenza di potenziale di circa $15\,kV$ tra voi e la maniglia. Assumendo per corretta questa differenza di potenziale, trovare la carica accumulata camminando sul tappeto. Si assuma che il corpo possa essere grossolanamente rappresentato con una sfera conduttrice uniformemente carica di $25\,cm$ di raggio e isolata elettricamente.

Soluzione. Per una sfera isolata, la capacità è determinata da$C=4\pi\varepsilon_0R$. Pertanto:

$$Q=CV=4\pi\varepsilon_0RV=4\pi\times8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}\times0.25\,m\times1.5\cdot10^4\,V=4.1\cdot10^{-7}\,C$$

Esercizio 165. Due fogli di alluminio sono separati da una distanza di $1.0\,mm$, presentano una capacità di $10pF$ e vengono caricati con una tensione di $12\,V$. Calcolare l'area dei piatti. La distanza tra i due piatti viene poi ridotta a $0.10\,mm$, mantenendo costante la carica. Trovare il nuovo valore della capacità e la variazione della differenza di potenziale.

Soluzione. Il condensatore può essere considerato piano e la sua capacità è data da $C=\varepsilon_0\frac{A}{d}$. L'area di tali piatti sarà

$$A=\frac{Cd}{\varepsilon_0}=\frac{1.0\cdot10^{-11}\,F\times1.0\cdot10^{-3}\,m}{8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}}=11\,cm^2$$

Se la distanza si riduce di dieci volte, a parità delle altre grandezze, allora la capacità aumenta di dieci volte, cioè $100\,pF$. La tensione è data da $V=\frac{Q}{C}$; se la carica rimane invariata e la capacità aumenta di dieci volte, allora la tensione diminuisce di dieci volte, cioè $V=1.2\,V$.

Esercizio 166. Una goccia sferica di mercurio di raggio R ha una capacità data da $C=4\pi\varepsilon_0R$. Se due di queste gocce si combinano in modo da formare una goccia unica, trovare la capacità risultante.

Soluzione. Assumiamo che nella combinazione il volume di ogni goccia si conservi e che, quindi, la goccia risultante abbia un volume doppio. Allora, ricordando il volume di una sfera, avremo che il volume di una goccia è

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

ora, se il volume finale raddoppia, diverrà

$$2V=2\times\frac{4}{3}\pi R^3$$

e avrà un raggio

$$\frac{4}{3}\pi R'^3 = \frac{8}{3}\pi R^3$$

cioè

$$R'^3 = 2R^3 \qquad R' = \sqrt[3]{2}R$$

la nuova capacità sarà

$$C' = 4\pi\varepsilon_0 R \times \sqrt[3]{2} = 1.26 \times C$$

Esercizio 167. Un condensatore viene progettato per operare, con capacità costante, in un ambiente a temperatura variabile. Il condensatore è del tipo a piatti paralleli con distanziatori plastici per mantenere i piatti allineati. Dimostrare che l'entità della variazione della capacità C con la temperatura è data da

$$\frac{dC}{dT} = C\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dT}\right)$$

dove A è l'area del piatto e x è la distanza tra i due piatti. Se i piatti fossero in alluminio, determinare il coefficiente di dilatazione termica dei distanziatori affinché la capacità non vari con la temperatura. (Si trascuri l'effetto dei distanziatori sulla capacità)

Soluzione. La prima parte dell'esercizio è di stampo prettamente matematico e richiede la conoscenza del calcolo della derivata del quoziente di due funzioni. Se la capacità varia con la temperatura perché sia i piatti che la distanza ne dipendono, avremo, sapendo che $C = \varepsilon_0 \frac{A}{x}$

$$\frac{dC}{dT} = \varepsilon_0 \frac{\frac{dA}{dT}x - A\frac{dx}{dT}}{x^2}$$

raccogliamo x al numeratore e semplifichiamo

$$\frac{dC}{dT} = \varepsilon_0 \frac{x\left(\frac{dA}{dT} - \frac{A}{x}\frac{dx}{dT}\right)}{x^2} = \varepsilon_0 \frac{\frac{dA}{dT} - \frac{A}{x}\frac{dx}{dT}}{x} = \frac{\varepsilon_0}{x}\frac{dA}{dT} - \varepsilon_0\frac{A}{x^2}\frac{dx}{dT}$$

$$\frac{C}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{C}{x}\frac{dx}{dT} = C\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dT}\right)$$

Assumiamo il coefficiente di dilatazione dell'alluminio $\lambda_{Al} = 2.3 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$. Se la capacità deve rimanere costante, allora

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} = \frac{1}{x}\frac{dx}{dT}$$

Sappiamo che la legge che descrive la dilatazione superficiale e lineare è

$$A = A_0\left(1 + 2\lambda_{Al}T\right) \qquad \frac{dA}{dT} = 2A_0\lambda_{Al}$$

$$x = x_0\left(1 + \lambda_{pla}T\right) \qquad \frac{dx}{dT} = x_0\lambda_{pla}$$

per cui, sostituendo avremo

$$\frac{1}{A_0} \times 2A_0\lambda_{Al} = \frac{1}{x_0} \times x_0\lambda_{pla}$$

$$\lambda_{pla} = 2\lambda_{Al} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{pla} = 4.6 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$$

13. Condensatori in serie e in parallelo

Esercizio 168. Quanti condensatori da $1.00\,\mu F$ devono essere connessi in parallelo per immagazzinare una carica di $1.00\,C$ applicando sui condensatori una differenza di potenziale di $110\,V$.

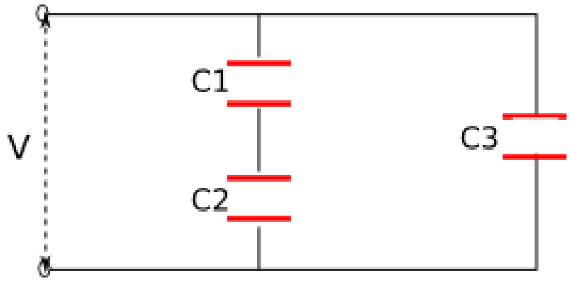
Soluzione. I condensatori si dicono in parallelo se la differenza di potenziale, applicata al loro insieme, è la stessa di quella applicata ad ognuno di essi. Inoltre, la carica della combinazione è uguale alla somma delle cariche sui singoli condensatori. In formula

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ...C_n \quad e \quad C_{eq} = \frac{q_{tot}}{V}$$

Nel nostro caso, la capacità della combinazione sarà $C_{eq} = nC = 1.00n\,\mu F$. Se la carica totale deve essere pari $1.0\,C$, si avrà

$$1.00n\,\mu F = \frac{1.0\,C}{110\,V} \qquad n = \frac{1.0}{110 \times 1.00 \cdot 10^{-6}} = 9090$$

Esercizio 169. Nella figura, trovare la capacità equivalente dell'insieme dei condensatori. Assumere $C_1 = 10.0\,\mu F$, $C_2 = 5.00\,\mu F$ e $C_3 = 4.00\,\mu F$.



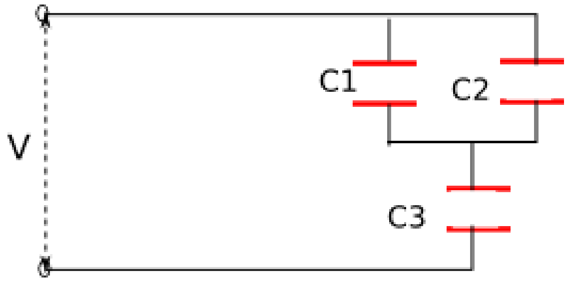
Soluzione. I condensatori C_1 e C_2sono in serie tra loro e il condensatore ad essi equivalente è in parallello con C_3. Troviamo prima

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}\,\mu F^{-1}$$

da cui $C_{1,2} = \frac{10}{3}\,\mu F$. Troviamo ora il condensatore equivalente dell'intero circuito

$$C_{eq} = C_{1,2} + C_3 = 3.33 + 4.00 = 7.33\,\mu F$$

Esercizio 170. Nel circuito in figura, trovare la capacità equivalente dell'insieme dei condensatori. si assuma $C_1 = 10.0\,\mu F$, $C_2 = 5.00\,\mu F$ e $C_3 = 4.00\,\mu F$.



Soluzione. I condensatori C_1 e C_2 sono in parallelo tra loro e il condensatore ad essi equivalente è in serie con il condensatore C_3. Troviamo prima

$$C_{1,2} = C_1 + C_2 = 10.0 + 5.00 = 15.0\,\mu F$$

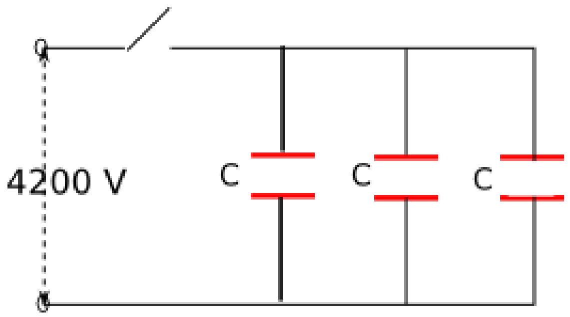
Troviamo ora il condensatore equivalente dell'intero circuito

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{15.0} + \frac{1}{4.00} = \frac{19.0}{60.0}$$

per cui

$$C_{eq} = 3.16\,\mu F$$

Esercizio 171. Ciascuno dei condensatori scarichi in figura ha una capacità di $25.0\,\mu F$. Si applica una differenza di potenziale di $4200\,V$ quando si chiude l'interruttore. Trovare la carica attraverso l'amperometro A.



Soluzione. I tre condensatori, alla chiusura dell'interruttore, sono in parallelo. Il condensatore equivalente è

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 3 \times 25.0\,\mu F = 75.0\,\mu F$$

Il circuito può quindi essere considerato composto da un solo condensatore di capacità uguale a $75.0\,\mu F$. La carica misurata dall'amperometro sarà

$$q = CV = 75.0 \cdot 10^{-6}\,F \times 4200\,V = 0.315\,C = 315\,mC$$

Esercizio 172. Un condensatore $C_1 = 6.00\,\mu F$ viene collegato in serie con un condensatore $C_2 = 4.00\,\mu F$; una differenza di potenziale di $200\,V$ viene applicata sulla coppia di condensatori. Determinare la capacità equivalente e la carica su ciascuno condensatore. Trovare, poi, la differenza di potenziale su ciascun condensatore.

Soluzione. La capacità equivalente di due condensatori in serie è data da

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6.00} + \frac{1}{4.00} = \frac{5}{12.0}$$

da cui $C_{eq} = 2.40\,\mu F$. Nei circuiti con condensatori in serie la carica su ogni condensatore è la stessa, cioè la carica che la batteria produce tra i piatti estremi dei due condensatori. La carica, pertanto, sarà

$$q = C_{eq}V = 2.40 \cdot 10^{-6}\,F \times 200\,V = 4.80 \cdot 10^{-4}\,C$$

La differenza di potenziale tra i piatti di ogni condensatore è diversa, avendo questi la stessa carica ma diversa capacità, ma è tale per cui la somma delle due differenze di potenziale è uguale a quella tra i poli della batteria. Pertanto,

$$V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{4.80 \cdot 10^{-4}\,C}{6.00 \cdot 10^{-6}\,C} = 80\,V \qquad V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{4.80 \cdot 10^{-4}\,C}{4.00 \cdot 10^{-6}\,C} = 120\,V$$

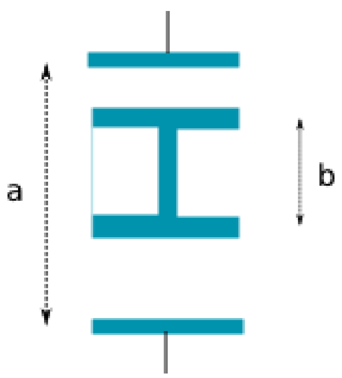
Esercizio 173. Un condensatore $C_1 = 6.00\,\mu F$ viene collegato in parallelo con un condensatore $C_2 = 4.00\,\mu F$; una differenza di potenziale di $200\,V$ viene applicata sulla coppia di condensatori. Determinare la capacità equivalente e la carica su ciascuno condensatore. Trovare, poi, la differenza di potenziale su ciascun condensatore.

Esercizio. La capacità equivalente di due condensatori in parallelo è uguale alla somma delle due capacità, per cui $C_{eq} = 10.0\,\mu F$. La carica però su ogni condensatore è diversa e tale per cui la somma delle due cariche eguagli la carica fornita dalla batteria; la tensione tra i piatti dei due condensatori è però la stessa ed è uguale a quella della batteria.

$$q_1 = C_1V = 6.00 \cdot 10^{-6}\,C \times 200\,V = 1.20\,mC \qquad q_2 = C_2V = 4.00 \cdot 10^{-6}\,C \times 200\,V = 0.800\,mC$$

Esercizio 174. La figura mostra due condensatori in serie. La parte rigida centrale di altezza b si può muovere verticalmente. Dimostrare che la capacità equivalente della combinazione in serie è indipendente dalla posizione della parte centrale ed è data da

$$C = \varepsilon_o \frac{A}{a-b}$$



Soluzione. Chiamiamo con x la distanza tra i piatti del condensatore superiore (non cambia nulla se scegliamo quello inferiore). Allora

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{x} \qquad C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{a-(b+x)}$$

troviamo ora la capacità del condensatore equivalente

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

sostituiamo

$$C_{eq} = \varepsilon_0 A \frac{1}{x\left[a-(b+x)\right]} \cdot \frac{x\left[a-(b+x)\right]}{a-b-x+x} = \varepsilon_o \frac{A}{a-b}$$

Esercizio 175. Tre condensatori vengono collegati in parallelo. Ciascuno di essi ha piatti di area A e distanza tra i piatti d. Trovare la distanza tra i piatti di un condensatore singolo, avente area A, se la capacità è uguale a quella dell'insieme descritto. Trovare, inoltre, la distanza se i tre condensatori sono collegati in serie.

Soluzione. Troviamo innanzitutto la capacità equivalente dei tre condensatori. Essendo in parallelo

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 3\varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Se un condensatore ha tale capacità, la distanza tra i suoi piatti sarà

$$3\varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d'}$$

da cui

$$d' = \frac{d}{3}$$

Se i condensatori sono disposti in serie, si ha

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{3d}{\varepsilon_0 A}$$

cioè $C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{A}{3d}$. Pertanto

$$\varepsilon_0 \frac{A}{3d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d'}$$

da cui

$$d' = 3d$$

Esercizio 176. Si applica una differenza di potenziale di $300\,V$ a una serie di condensatori di capacità $C_1 = 2.0\,\mu F$ e $C_2 = 8.0\,\mu F$. Trovare la carica e la differenza di potenziale di ciascun condensatore. I condensatori carichi sono scollegati uno dall'altro e dalla batteria. Sono poi ricollegati, piatto positivo con piatto positivo e piatto negativo con piatto negativo, senza applicare alcuna tensione esterna. Trovare la carica e la differenza di potenziale di ciascuno. I condensatori carichi come all'inizio sono ricollegati attraverso i piatti di segno opposto. Trovare la carica in condizioni stazionarie e la differenza di potenziale di ciascuno.

Soluzione. I due condensatori in serie sono sostituibili con un condensatore equivalente di capacità

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2.0} + \frac{1}{8.0} = \frac{5}{8.0} \qquad C_{eq} = 1.6\,\mu F$$

la carica su ogni condensatore è la stessa e la somma delle differenze di potenziale deve essere uguale a quella della batteria. La carica è uguale a

$$q = C_{eq} V = 1.6\,\mu F \times 300\,V = 4.8 \cdot 10^{-4}\,C$$

e le due differenze di potenziale sono

$$V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{4.8 \cdot 10^{-4}\,C}{2.0 \cdot 10^{-6}\,\mu F} = 240\,V \qquad V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{4.8 \cdot 10^{-4}\,C}{8.0 \cdot 10^{-6}\,\mu F} = 60\,V$$

Scolleghiamo ora i condensatori e ricolleghiamoli. La disposizione indicata presenta una situazione nella quale i condensatori risultano in parallelo. La carica totale è, pertanto, uguale al doppio della carica di ogni condensatore. Avremo

$$V = \frac{2 \times 4.8 \cdot 10^{-4}\,C}{10 \cdot 10^{-6}\,\mu F} = 96\,V$$

Le rispettive cariche, dopo il collegamento, si ridistribuiranno così

$$q_1 = 2.0 \cdot 10^{-6}\,\mu F \times 96\,V = 1.9 \cdot 10^{-4}\,C \qquad q_2 = 8.0 \cdot 10^{-6}\,\mu F \times 96\,V = 7.7 \cdot 10^{-4}\,C$$

Nel terzo caso i condensatori si scaricano e tensione e carica saranno nulli.

Esercizio 177. Si abbiano a disposizione molti condensatori da $2.0\,\mu F$, ciascuno in grado di reggere $200\,V$ senza provocare scariche. Come si potrebbero connettere tali condensatori affinché la combinazione presenti una capacità equivalente ai morsetti pari a $0.40\,\mu F$ e in grado di sopportare senza scariche una differenza di potenziale di $1000\,V$?

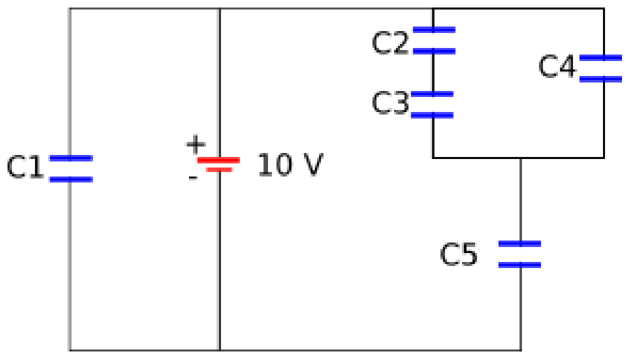
Soluzione. Possiamo escludere la combinazione con i condensatori tutti in parallelo, perché in tal caso la capacità equivalente non sarebbe espressa da nessuno dei valori indicati.
Poniamo tutti i condensatori in serie. In tal caso, possiamo calcolare il numero dei condensatori

$$n = \frac{C}{C_{eq}} = \frac{2.0}{0.40} = 5$$

ponendo tutti e 5 i condensatori in serie, tutti avrebbero la stessa carica pari a $q = CV = 2.0 \cdot 10^{-6} \times 100 = 2.0 \cdot 10^{-4}\,C$; la differenza di potenziale relativa al condensatore equivalente sarà

$$V = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{2.0 \cdot 10^{-4}\,C}{0.40 \cdot 10^{-6} F} = 500\,V$$

Esercizio 178. Nella figura, la batteria ha tensione $10\,V$ e i cinque condensatori hanno capacità $10\,\mu F$. Trovare la carica sui condensatori C_1 e C_2.



Soluzione. Il condensatore C_1 è in parallelo con il condensatore equivalente a tutti gli altri. Pertanto, avrà la stessa differenza di potenziale e una carica

$$q = C_1 V = 10 \cdot 10^{-6}\,\mu F \times 10\,V = 1.0 \cdot 10^{-4}\,C$$

I condensatori C_2 e C_3 sono tra loro in serie e sono in parallelo con C_4. Il condensatore equivalente $C_{2,3}$ è

$$C_{2,3} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{100}{20} = 5\,\mu F$$

Il condensatore equivalente a $C_{2,3}$ e C_4 ha una capacità

$$C_{2,3,4} = C_{2,3} + C_4 = 5 + 10 = 15\,\mu F$$

Il condensatore equivalente a $C_{2,3,4}$ e C_5 sono in serie, per cui

$$C_{2,3,4,5} = \frac{C_{2,3,4} \cdot C_5}{C_{2,3,4} + C_5} = \frac{150}{25} = 6\,\mu F$$

Ora, il condensatore equivalente $C_{2,3,4,5}$ è in parallelo con C_1 e avrà quindi la stessa tensione ai suoi estremi; da ciò è possibile calcolare la carica su tale condensatore equivalente

$$q_{2.3.4.5} = C_{2.3.4.5} V = 6.0 \cdot 10^{-6} \times 10 = 6.0 \cdot 10^{-5}\,C$$

A ritroso, C_5 e $C_{2,34}$ sono posti in serie e quindi avranno la stessa carica, ma diversa tensione, che possiamo calcolare

$$V_{2,3,4} = \frac{6.0 \cdot 10^{-5}}{1.5 \cdot 10^{-5}} = 4.0\,V$$

Ora, C_2 e $C_{3,4}$ sono tra loro in parallelo e avranno la stessa tensione, per cui $V_2 = V_{3,4} = 4.0V$. La carica sul condensatore $C_{2,3}$ sarà quindi

$$q_{2,3} = C_{2,3} V = 5.0 \cdot 10^{-6} \times 4.0 = 2.0 \cdot 10^{-5}$$

Tale carica sarà anche la carica del condensatore C_2 che è posto in serie al condensatore C_3.

Esercizio 179. Un condensatore da $100\,pF$ viene caricato con una differenza di potenziale di $50\,V$; la batteria viene poi staccata. Il condensatore viene collegato in parallelo con un secondo condensatore inizialmente scarico. La differenza di potenziale che si misura cade a $35\,V$, Determinare la capacità di questo secondo condensatore.

Soluzione. Calcoliamo, dapprima, la carica sul condensatore iniziale.

$$q = CV = 100 \cdot 10^{-12}\,F \times 50\,V = 5.0 \cdot 10^{-9}\,C$$

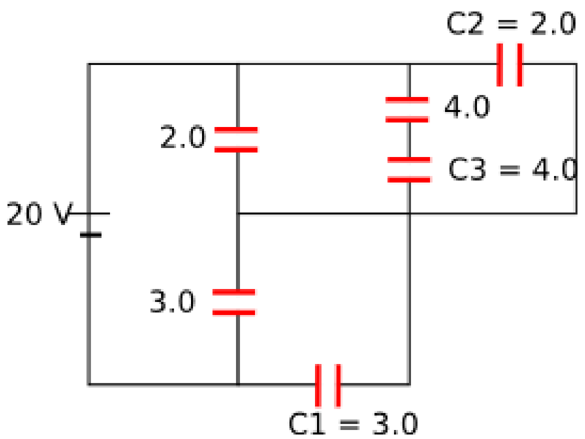
Togliendo la batteria ed inserendo il secondo condensatore, avremo una configurazione con due condensatori in parallelo, e in questo caso, la carica complessiva si distribuisce tra i due condensatori, cioè $C_{eqv} = C + C_{ins}$. Possiamo pertanto determinare la capacità del condensatore equivalente, quando entrambi si trovano ad una $V_{fin} = 35\,V$.

$$C_{eq} = \frac{q}{V_{fin}} = \frac{5.0 \cdot 10^{-9}\,C}{35} = 1.43 \cdot 10^{-10}\,F$$

Pertanto

$$C_{ins} = 1.43 \cdot 10^{-10}\,F - 1.00 \cdot 10^{-10}\,F = 43\,pF$$

Esercizio 180. In figura (tutti i valori delle capacità sono in μF), la batteria ha tensione $20\,V$. Trovare (a) la capacità equivalente di tutti i condensatori; (b) la carica del condensatore equivalente. Calcolare la differenza di potenziale e la carica su (c) il condensatore C_1, (d) il condensatore C_2 ed (e) il condensatore C_3.



Soluzione. (a) La capacità equivalente dei due condensatori da $4.00\,\mu F$ collegati tra loro in serie è data da

$$\frac{1}{C_{serie}} = \frac{1}{4.0} + \frac{1}{4.0} = \frac{1}{2.0\,\mu F}$$

per cui $C_{serie} = 2.0\,\mu F$. Questa combinazione è collegata in parallelo con altri due condensatori da $2.00\,\mu F$ (uno su ogni lato), e ne risulta una capacità equivalente $C = 3 \times 2.0 = 6.0\,\mu F$. Questa è ora un serie con un'altra combinazione, formata dai due condensatori da $3.0\,\mu F$ collegati tra loro in parallelo (che sono equivalenti a $C' = 2 \times 3.0 = 6.0\,\mu F$. Allora, la capacità equivalente dell'intero circuito è

$$C_{eq} = \frac{CC'}{C + C'} = \frac{(6.0 \times 6.0)\ \mu F^2}{(6.0 + 6.0)\ \mu F} = 3.0\,\mu F$$

(b) Ora se $V = 20\,V$ è la differenza di potenziale fornita dalla batteria, si avrà

$$q = C_{eq}V = 3.0\,\mu F \times 20\,V = 6.0 \cdot 10^{-5}\,C$$

(c) La differenza di potenziale ai capi di C_1 è data da

$$V_1 = \frac{CV}{C + C'} = \frac{6.0\,\mu F \times 20\,V}{6.0\,\mu F + 6.0\,\mu F} = 10\,V$$

e la carica su C_1 è

$$q_1 = C_1V_1 = 3.0\,\mu F \times 10\,V = 3.0 \cdot 10^{-5}\,C$$

(d) La differenza di potenziale ai capi di C_2 è data da

$$V_2 = V - V_1 = 20\,V - 10\,V = 10\,V$$

e la carica su C_2 è

$$q_2 = C_2V_2 = 2.0\,\mu F \times 10\,V = 2.0 \cdot 10^{-5}\,C$$

(e) Poiché la differenza di potenziale V_2 è equamente divisa tra C_3 e l'altro condensatore da $4.0\,\mu F$ in serie con esso, la differenza di potenziale di C_3 è data da

$$V_3 = \frac{V_2}{2} = 5.0\,V$$

14. Energia immagazzinata in un campo elettrico

Esercizio 181. Trovare l'energia immagazzinata in un metro cubo d'aria in presenza di un campo dovuto a "bel tempo" avente intensità di $150\,V/m$.

Soluzione. L'energia immagazzinata è sotto forma di energia potenziale. Essendo distribuita in un volume pari a $1\,m^3$, possiamo parlare di densità di energia che è espressa da

$$u \cdot Vol = \frac{Vol}{2}\varepsilon E^2 = 1.00\,m^3 \times 0.5 \times 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2} \times 150^2\,\frac{N^2}{C^2} = 9.96 \cdot 10^{-8}\,J$$

Esercizio 182. Trovare la capacità necessaria per immagazzinare un'energia di $10\,kWh$ con un differenza di potenziale di $1000\,V$

Soluzione. La risposta può essere immediatamente ricavata dalla relazione che esprime l'energia immagazzinata in funzione della differenza di potenziale e della capacità del presunto condensatore (ricordiamo che il fattore di conversione da kWh a $Joule$ è $3.6 \cdot 10^6$)

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

da cui

$$C = \frac{2U}{V^2} = \frac{2 \times 3.6 \cdot 10^7\,J}{1.0 \cdot 10^6\,Volt^2} = 72\,F$$

Esercizio 183. Un condensatore a piatti paralleli con aria come dielettrico ha una capacità di $130\,pF$. Trovare l'energia immagazzinata se la differenza di potenziale applicata è $56.0\,V$.

Soluzione. L'energia immagazzinata è data da, l'aria come dielettrico può essere assimilata al vuoto, essendo la sua costante dielettrica molto vicina a quella del vuoto

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 130 \cdot 10^{-12}\,F \times 56.0^2\,V^2 = 2.04 \times 10^{-7} J$$

Esercizio 184. Un condensatore è caricato con tensione V. Se volete aumentare l'energia immagazzinata del 10%, di che percentuale dovrebbe aumentare V?

Soluzione. L'energia immagazzinata è data da $U = \frac{1}{2}CV^2$; se, quindi, U cresce del 10% diverrà $1.1\,U$ e quindi

$$V'^2 = 2.2 \times \frac{U}{C} = 2.2 \times \frac{\frac{1}{2}CV^2}{C}$$

quindi $V' = \sqrt{1.1} = 1.049$ e l'aumento in percentuale sarà pari a circa il 4.9%.

Esercizio 185. Un condensatore a piatti paralleli operante in aria, avente un'area di $40\,cm^2$ e una distanza tra i piatti di $1.0\,mm$, viene caricato con una differenza di potenziale di $600\,V$. Determinare la (a) capacità, (b) la quantità di carica su ciascun piatto, (c) l'energia immagazzinata, (d) il campo elettrico tra i piatti, (e) la densità di energia fra i piatti.

Soluzione. Per un tale condensatore la (a) capacità è espressa da

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \times \frac{40 \cdot 10^{-4}\,m^2}{1.0 \cdot 10^{-3}\,m} = 3.54 \cdot 10^{-11}\,F$$

(b) la quantità di carica è pari a

$$q = CV = 3.54 \cdot 10^{-11}\,F \times 600\,V = 2.12 \cdot 10^{-8}\,C = 21\,nC$$

(c) l'energia immagazzinata

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = 0.5 \times 3.54 \cdot 10^{-11}\,C \times 600^2\,V^2 = 6.3 \cdot 10^{-6}\,J$$

(d) il campo elettrico

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 A}=\frac{2.12\cdot10^{-8}\,C}{8.85\cdot10^{-12}\,\frac{F}{m}\times40\cdot10^{-4}\,m^2}=6.0\cdot10^5\,\frac{V}{m}$$

(e) la densità di energia è

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=0.5\times8.85\cdot10^{-12}\,\frac{F}{m}\times\left(6.0\cdot10^5\right)^2\,\frac{V^2}{m^2}=1.6\,\frac{J}{m^3}$$

Esercizio 186. Due condensatori da $2.0\,\mu F$ e $4.0\,\mu F$ sono collegati in parallelo e caricati con una differenza di potenziale di $300\,V$. Calcolare l'energia totale immagazzinata nei condensatori.

Soluzione. L'energia totale è la somma delle energie accumulate nei singoli condensatori. Poiché sono collegati in parallelo, la differenza di potenziale V è la stessa per entrambi i condensatori e l'energia totale è

$$U=\frac{1}{2}C_{eqv}V^2=\frac{1}{2}\left(C_1+C_2\right)V^2=0.5\times6.0\cdot10^{-6}\,F\times300^2\,V^2=0.27\,J$$

Esercizio 187. Un condensatore cilindrico ha raggi a e b, come in figura. Dimostrare che metà dell'energia potenziale elettrica immagazzinata giace in un cilindro il cui raggio è $r=\sqrt{ab}$

Soluzione. La capacità di un condensatore cilindrico di raggio interno a ed esterno b è data da

$$C=\frac{q^2\ln\frac{b}{a}}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

dove L è la lunghezza del cilindro. Consideriamo una superficie guassiana di raggio r, tale che $a<r<b$. Se l'energia immagazzinata deve essere la metà, allora, rimanendo invariata la carica e la lunghezza L, si ha

$$\ln\frac{r}{a}=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}=\ln\sqrt{\frac{b}{a}}$$

pertanto

$$\frac{r}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

ed essendo $a=\sqrt{a^2}$, si ha

$$r=\sqrt{ab}$$

Esercizio 188. Dato un condensatore da $7.4\,pF$ operante in aria, viene chiesto di modificarlo per immagazzinare fino a $7.4\,\mu J$ di energia con una differenza di potenziale massima di $652\,V$. Trovare il dielettrico che è opportuno utilizzare per riempire la zona compresa tra i piatti, se non si concede un margine di errore.

Soluzione. L'energia accumulabile in un condensatore è data da

$$U=\frac{1}{2}CV^2$$

se tra i piatti del condensatore è posto un dielettrico, avremo

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon_r CV^2$$

da cui

$$\varepsilon_r=\frac{2U}{CV^2}=\frac{2\times7.4\cdot10^{-6}\,J}{7.4\cdot10^{-12}\,F\times652^2}=4.7$$

che corrisponde al vetro pyrex.

Esercizio 189. Per costruire un condensatore a piatti paralleli si hanno a disposizione due piatti di rame, un foglio di mica (spessore $=1.0\,mm$, $\varepsilon_r=5.4$), un foglio di vetro (spessore $=2.0\,mm$, $\varepsilon_r=7.0$) e una lastra di paraffina (spessore $=1.0\,cm$, $\varepsilon_r=2.0$). Per ottenere la capacità massima, quale foglio va interposto ai piatti del condensatore?

Soluzione. Se il dielettrico deve riempire lo spazio tra i piatti, allora con i dati assegnati può variare lo spazio tra i piatti. Se i piatti sono piani allora la capacità è espressa da

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

Supposta A sempre uguale, avremo nei tre casi

$$C_1 = \varepsilon_0 \times 5.4 \frac{A}{1.0 \cdot 10^{-3}} = 5400\varepsilon_0 A \quad C_2 = \varepsilon_0 \times 7.0 \frac{A}{2.0 \cdot 10^{-3}} = 3500\varepsilon_0 A \quad C_3 = \varepsilon_0 \times 2.0 \frac{A}{1.0 \cdot 10^{-2}} = 100\varepsilon_0 A$$

da cui si ricava che la capacità massima si otterrà inserendo tra i piatti un foglio di mica.

Esercizio 190. Un condensatore a piatti paralleli operante in aria ha una capacità di $50\,pF$. Se ciascuno dei suoi piatti ha un'area di $0.35\,m^2$, trovare la loro distanza. Se la regione compresa tra i piatti viene riempita con un materiale che ha costante dielettrica relativa pari a 5.6, trovare la sua capacità.

Soluzione. Per piatti piani e paralleli, la capacità è $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$, da cui

$$d = \frac{\varepsilon_0 A}{C} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \times 0.35\,m^2}{50 \cdot 10^{-12}\,F} = 6.2\,cm$$

se $\varepsilon_r = 5.6$, allora la capacità vale

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \times 5.6 \times 0.35\,m^2}{6.2 \cdot 10^{-2}\,m} = 280\,pF$$

Esercizio 191. Un cavo coassiale usato in una linea di trasmissione ha un raggio interno di $0.10\,mm$ e uno esterno di $0.60\,mm$. Calcolare la capacità del cavo al metro. Assumere che lo spazio compreso tra i conduttori sia riempito con polistirolo ($\varepsilon_r = 2.6$).

Soluzione. Per un condensatore cilindrico la capacità per metro è espressa da

$$\frac{C}{L} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = 2\pi \times 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \times 2.6 \frac{1}{\ln\left(\frac{0.60}{0.10}\right)} = 81\,pF$$

Esercizio 192. Una certa sostanza ha costante dielettrica relativa pari a 2.8 e rigidità dielettrica di $18\,\frac{MV}{m}$. Se viene impiegata come materiale dielettrico in un condensatore a piatti paralleli, trovare l'area minima dei piatti affinché la capacità sia pari a $7.0 \cdot 10^{-2}\,\mu F$ e il condensatore possa sopportare una differenza di potenziale di $4.0\,kV$.

Soluzione. La capacità di un condensatore a piatti paralleli è data da $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$, mentre il campo elettrico tra i due piatti è dato da $E = \frac{V}{d}$; sostituendo e risolvendo rispetto all'area, otteniamo

$$A = \frac{CV}{\varepsilon_0 \varepsilon_r E}$$

Se l'area deve essere minima, allora il campo elettrico deve essere il massimo sostenibile per la differenza di potenziale assegnata, per cui

$$A = \frac{7.0 \cdot 10^{-8}\,F \times 4.0 \cdot 10^3\,V}{8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \times 2.8 \times 18 \cdot 10^6\,\frac{V}{m}}$$

Esercizio 193. Si chiede di costruire un condensatore con una capacità di $1\,nF$ e un potenziale disruptivo di almeno $10000\,V$. Si pensa di utilizzare la parete cilindrica di un bicchiere pyrex rivestendo le pareti interna ed esterna con fogli di alluminio. Il bicchiere è alto $15\,cm$ con un raggio interno di $3.6\,cm$ ed esterno di $3.8\,cm$. Trovare la capacità e la tensione di scarica. (la costante dielettrica del vetro pyrex è $\varepsilon_r = 4.7$ e la rigidità dielettrica è $14\,\frac{kV}{mm}$).

Soluzione. Il condensatore è di tipo cilindrico e la sua capacità è espressa da

$$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = 2\pi \times 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \times 4.7 \times \frac{0.15}{\ln\left(\frac{3.8}{3.6}\right)} = 7.2 \cdot 10^{-10}\,F$$

La tensione di scarica si ricava dalla rigidità dielettrica e, pertanto

$$V = \frac{14\,\frac{kV}{mm}}{2.0\,mm} = 28\,kV$$

Esercizio 194. Una lastra di rame di spessore b viene inserita in un condensatore a piatti paralleli di area A e posti tra loro ad una distanza d, in modo che si trovi esattamente a metà strada tra i due piatti. Trovare la capacità dopo l'introduzione della lastra; se si mantiene costante la carica q sui piatti, trovare il rapporto tra l'energia immagazzinata prima e dopo l'inserimento della lastra. Trovare poi il lavoro compiuto sulla lastra durante l'inserimento e indicare se la lastra viene attratta o se è necessario spingerla.

Soluzione. L'inserimento di un nuovo conduttore tra le piastre di un condensatore corrisponde alla presenza di due condensatori a piastre parallele fra loro in serie. Il rame è posto nel mezzo e quindi i due condensatori hanno piatti di uguale area e che stanno alla stessa distanza, data da $\frac{d-b}{2}$. Le capacità saranno quindi uguali. Troviamo la capacità del condensatore equivalente

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad con \quad C_1 = C_2$$

avremo

$$C_{eq} = \frac{\left(\frac{2\varepsilon_0 A}{d-b}\right)^2}{\frac{4\varepsilon_0 A}{d-b}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-b}$$

Mantenendo costante la carica tra i piatti, l'energia immagazzinata in assenza del rame sarà

$$U_1 = \frac{q^2}{2C}$$

mentre dopo l'inserimento della barra di rame sarà

$$U_2 = \frac{q^2}{2C_{eq}}$$

e il rapporto sarà

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_{eq}}{C} = \frac{\frac{\varepsilon_0 A}{d-b}}{\frac{\varepsilon_0 A}{d}} = \frac{d}{d-b}$$

Il lavoro necessario sarà pari alla variazione dell'energia immagazzinata, per cui

$$L = \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{q^2}{2C_{eq}} - \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2}\left(\frac{d-b-d}{\varepsilon_0 A}\right) = -\frac{q^2 b}{\varepsilon_0 A}$$

Essendo il lavoro negativo, la forza è quella del campo elettrico e quindi la piastra di rame verrà attratta verso l'interno.

Esercizio 195. Un condensatore a piatti paralleli di area A viene riempito con due dielettrici che occupano ognuno metà dello spazio tra le due piastre, d. Trovare la capacità di un tale condensatore. (le costanti dielettriche sono $\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}$).

Soluzione. Il condensatore può essere considerato come composto da due condensatori in parallelo aventi ognuno piastre piane e parallele di area $\frac{A}{2}$. Pertanto la capacità equivalente sarà la somma delle due capacità

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1} A}{2d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2} A}{2d} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}\left(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}\right)$$

15. Corrente elettrica

Esercizio 196. La corrente in un fascio di elettroni di un tipico monitor è di $200\,\mu A$. Trovare il numero di elettroni che colpiscono lo schermo ogni secondo.

Soluzione: La corrente è data dal rapporto tra la quantità di carica che attraversa una sezione di un conduttore nell'unità di tempo. Pertanto, il numero di elettroni corrisponde alla carica complessiva divisa per la carica di un singolo elettrone

$$Q_{tot} = 200 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{s} \times 1\,s = 200 \cdot 10^{-6}\,C \qquad n_{el} = \frac{Q_{tot}}{q_e} = \frac{200 \cdot 10^{-6}\,C}{1.60 \cdot 10^{-19}\,C} = 1.25 \cdot 10^{15}$$

Esercizio 197. La cinghia di un acceleratore di Van de Graaf è larga $l = 50\,cm$ e scorre a $v = 30\,\frac{m}{s}$. La cinghia preleva cariche da una sorgente e le trasferisce all'interno di una sfera per una corrente equivalente di $100\,\mu A$. Calcolare la densità di carica superficiale sulla cinghia.

Soluzione. Consideriamo una densità di carica superficiale, supponendo che la larghezza della cinghia sia molto maggiore del suo spessore. In tal caso, la corrente che viene raccolta può essere intesa come la quantità di carica presente sull'intera larghezza della cinghia e quindi esprimibile come $i = \sigma v l$, e risolvendo rispetto a σ, si ottiene

$$\sigma = \frac{i}{vl} = \frac{100 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{s}}{30\,\frac{m}{s} \times 0.5\,m} = 6.7 \cdot 10^{-6} = 6.7\,\frac{\mu C}{m^2}$$

Esercizio 198. Una sfera conduttrice isolata ha un raggio di $10\,cm$. Un filo porta una corrente di $1.0000020\,A$ dentro di essa. Un altro filo trasporta una corrente di $1.0000000\,A$ fuori di essa. Quanto tempo deve restare attaccata la sfera perché aumenti il proprio potenziale di $1000\,V$.

Soluzione. La corrente netta, e, quindi, la carica netta, che rimane sulla sfera conduttrice è pari a $\Delta i = 1.0000020 - 1.0000000 = 2.0 \cdot 10^{-6}\,A$. La capacità di un conduttore sferico è

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{q}{\Delta V} = \frac{i\Delta t}{\Delta V}$$

Risolviamo rispetto all'intervallo di tempo

$$\Delta t = \frac{C\Delta V}{\Delta i} = \frac{4\pi \times 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{V \cdot m} \times 0.1\,m \times 1000\,V}{2.0 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{s}} = 5.6 \cdot 10^{-3}\,s$$

16. Densità di Corrente

Esercizio 199. Una corrente piccola ma misurabile, di $1.2 \cdot 10^{-10}\,A$ scorre in un filo di rame avente un diametro di $2.5\,mm$. Calcolare la densità di corrente e la velocità di deriva degli elettroni.

Soluzione. La densità di corrente è il rapporto tra l'intensità della corrente e l'area della sezione considerata

$$J = \frac{i}{A} = \frac{1.2 \cdot 10^{-10}\,A}{\pi \times \left(1.25 \cdot 10^{-3}\right)^2\,m^2} = 2.4 \cdot 10^{-5}\,\frac{A}{m^2}$$

la velocità di deriva è data da

$$v_d = \frac{J}{ne}$$

dove ne rappresenta la carica totale nell'unità di volume, cioè la densità di carica. Per trovare n, cioè il numero di elettroni per unità di volume. Tale valore può essere considerato equivalente al numero di atomi nell'unità di volume (supponiamo la densità di corrente costante):

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho}{M}$$

dove ρ è la densità del rame, N_A il numero di Avogadro e M la massa molare del rame. Pertanto,

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{6.02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1} \times 9.0 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}}{64 \cdot 10^{-3}\,\frac{kg}{mol}} = 8.5 \cdot 10^{28}\,\frac{elettroni}{m^3}$$

Avremo, sostituendo

$$v_d = \frac{2.4 \cdot 10^{-5}\,\frac{C}{m^2 s}}{8.5 \cdot 10^{28}\,\frac{elettroni}{m^3} \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C} = 1.8 \cdot 10^{-15}\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 200. Una giunzione p-n è costituita da due diversi semiconduttori di forma cilindrica, con uguale raggio di $0.165\,mm$. In una certa applicazione scorrono attraverso la giunzione dalla parte negativa (n) alla parte positiva (p) $3.50 \cdot 10^{15}$ elettroni al secondo, mentre $2.25 \cdot 10^{15}$ lacune al secondo scorrono in senso opposto (la lacuna si comporta come una particella con carica pari a $+1.6 \cdot 10^{-19}\,C$). Determinare la corrente totale e la densità di corrente.

Soluzione. La corrente dovuta alle cariche negative che scorre ogni secondo è pari a

$$i = \frac{3.50 \cdot 10^{15} \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C}{1\,s} = 5.60 \cdot 10^{-4}\,A$$

La corrente dovuta alle lacune positive che scorre ogni secondo è pari a

$$i = \frac{2.25 \cdot 10^{15} \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C}{1\,s} = 3.60 \cdot 10^{-4}\,A$$

La corrente netta che scorre ogni secondo in una sezione è uguale alla somma delle cariche al secondo

$$i_{tot} = 5.60 \cdot 10^{-3}\,A + 3.60 \cdot 10^{-4}\,A = 9.20 \cdot 10^{-4}\,A$$

La densità di carica è

$$J = \frac{i}{A} = \frac{9.20 \cdot 10^{-4}\,A}{\pi \times (1.65 \cdot 10^{-4}\,m)^2} = 1.08 \cdot 10^4\,\frac{A}{m^2}$$

Esercizio 201. Vicino alla Terra la densità di protoni del vento solare è pari a $8.70\,cm^{-3}$ e la loro velocità è pari a $470\,\frac{km}{s}$. Determinare la densità di corrente di questi protoni. Se il campo magnetico terrestre non li deflettesse, i protoni colpirebbero la Terra. Determinare in tale caso la corrente che riceverebbe la Terra.

Soluzione. La densità esprime il numero dei protoni per unità di volume. La carica totale contenuta sarà

$$q = ne^+ = \frac{8.70}{10^{-6}} \cdot \frac{1}{m^3} \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C = 1.39 \cdot 10^{-10}\,\frac{C}{m^3}$$

Considerando la velocità dei protoni come una velocità di deriva, la densità di corrente sarà data da

$$J = nev = 1.39 \cdot 10^{-10}\,\frac{C}{m^3} \times 470 \cdot 10^3\,\frac{m}{s} = 6.54 \cdot 10^{-5}\,\frac{A}{m^2}$$

Esercizio 202. Un fascio stazionario di particelle alfa ($q = 2e$), propagantesi con energia cinetica pari a $K = 20\,MeV$, trasporta una corrente di $0.25\,\mu A$. Se il fascio è diretto perpendicolarmente a una superficie piana, trovare il numero delle particelle alfa che colpiscono la superficie in $3.0\,s$. Trovare il numero di particelle presenti in ogni istante in una lunghezza pari a $20\,cm$ di fascio; trovare, infine, la differenza di potenziale necessaria ad accelerare ogni particella alfa dallo stato di quiete per farle ottenere un'energia di $20\,MeV$.

Soluzione. La corrente è il rapporto tra la quantità di carica che fluisce attraverso una superficie nell'unità di tempo. Se consideriamo il tempo l'intervallo di tempo di $1\,s$, la quantità di carica sarà pari a $Q = 0.25\,\mu C$. Il numero delle cariche sarà

$$n = \frac{Q}{2e} = \frac{0.25 \cdot 10^{-6}\,C}{2 \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C} = 7.8 \cdot 10^{11}$$

Il fascio è perpendicolare alla superficie e quindi tutte le particelle lo colpiscono frontalmente; il loro numero in $3\,s$ sarà

$$n_{tot} = 7.8 \cdot 10^{11} \times 3 = 2.3 \cdot 10^{12}$$

La massa di una particella alfa è pari alla massa di due protoni e due neutroni meno l'energia necessaria per tenere unite tali particelle e vale $m_\alpha = 4.0026\,uma = 4.0026 \times 1.66 \cdot 10^{27}\,kg = 6.64 \cdot 10^{-27}\,kg$. La velocità posseduta da tali particelle, supposta uguale per tutte, è (fattore di conversione; $1MeV = 1.602 \cdot 10^{-13}\,J$

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{40 \times 1.602 \cdot 10^{-13}\,J}{6.64 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 3.1 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}$$

Con tale velocità le particelle alfa percorrono $20\,cm$ in un tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{0.20\,m}{3.1 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}} = 6.4 \cdot 10^{-9}\,s$$

Il numero delle particelle in questo intervallo di tempo è pari a

$$n = 7.8 \cdot 10^{11}\,\frac{n^\circ}{s} \times 6.4 \cdot 10^{-9}\,s = 5.0 \cdot 10^3$$

Usiamo la conservazione dell'energia, con energia cinetica iniziale nulla e finale pari a $20\,MeV$. L'energia potenziale iniziale è $U = q\Delta V = 2e\Delta V$ e l'energia potenziale finale è zero. Di conseguenza,

$$K_f = U_i = 2e\Delta V$$

risolvendo risolvendo rispetto a V, avremo

$$\Delta V = \frac{K_f}{2e} = \frac{20 \times 1.60 \cdot 10^{-13}\,J}{2 \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C} = 1.0 \cdot 10^7\,V$$

Esercizio 203. Una rotaia di acciaio di un tram ha la sezione normale di $56.0\,cm^2$. Trovare la resistenza di una rotaia lunga $10.0\,km$, sapendo che la resistività dell'acciaio è $\rho = 3.00 \cdot 10^{-7}\,\Omega \cdot m$.

Soluzione. La resistenza di un materiale dipende dal materiale stesso, dalla sua lunghezza e sezione, secondo la relazione

$$R = \rho\frac{L}{A}$$

Sostituendo i valori assegnati, otteniamo

$$R = \rho = 3.00 \cdot 10^{-7}\,\Omega \cdot m \times \frac{1.00 \cdot 10^4\,m}{56.0 \cdot 10^{-4}\,m^2} = 0.536\,\Omega$$

Esercizio 204. Un filo conduttore ha un diametro di $1.0\,mm$, una lunghezza di $2.0\,m$ e una resistenza di $50\,m\Omega$. Trovare la resistività del materiale.

Soluzione. La resistività è data da

$$\rho = \frac{RA}{L} = \frac{50 \cdot 10^{-3}\,\Omega \times \pi\left(0.5 \cdot 10^{-3}\,m\right)^2}{2.0\,m} = 2.0 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot m$$

Esercizio 205. Un filo di nichelcromo (una lega di nichel-cromo-ferro) è lungo $1.0\,m$ e ha una sezione di $1.0\,mm^2$. Esso è percorso da una corrente di $4.0\,A$ quando viene applicata una differenza di potenziale di $2.0\,V$ ai suoi capi. Calcolare la conducibilità del materiale.

Soluzione. La conducibilità è il reciproco della resistività. Applicando la prima legge di Ohm, $i = \frac{V}{R}$ che stabilisce una relazione tra corrente, tensione e resistenza, si può ottenere il valore della resistenza

$$R = \frac{V}{i} = \frac{2.0\,V}{4.0\,A} = 0.50\,\Omega$$

Dalla resistenza è possibile ottenere la conducibilità

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{L}{RA} = \frac{1.0\,m}{0.50\,\Omega \times 1.0 \times 10^{-6}\,mm^2} = 2.0 \cdot 10^6\ (\Omega \cdot m)^{-1}$$

Esercizio 206. Un essere umano può rimanere folgorato se una pur piccola corrente di $50\,mA$ passa vicino al cuore. Un elettricista che lavora a mani nude e sudate, impugnando due conduttori realizza un buon contatto elettrico. Se la resistenza dell'elettricista è pari a $2000\,\Omega$, qual è la tensione che gli sarebbe fatale?

Soluzione. Se la corrente è di $50\,mA$ e la resistenza $R = 2000\,\Omega$, allora la tensione sarà, ammettendo la validità della legge di Ohm in questo caso

$$V = iR = 50 \cdot 10^{-3}\,A \times 2000\,\Omega = 100\,V$$

Esercizio 207. L'avvolgimento di rame di un motore ha una resistenza di $50\,\Omega$ a 20°, quando il motore è fermo. Dopo un funzionamento ininterrotto di varie ore la resistenza sale a $58\,\Omega$. Trovare la temperatura dell'avvolgimento. Si trascurino le variazioni dimensionali dell'avvolgimento. (coefficiente termico del rame $\alpha = 4.3 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$).

Soluzione. la resistività di un materiale varia al variare della temperatura. Nel caso del rame la variazione segue una legge quasi lineare in un intervallo di temperatura abbastanza ampio. Si può assumere, pertanto,

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0)$$

La resistività dipende a sua volta dalla lunghezza del conduttore e dalla sezione dello stesso; nell'ipotesi in cui il conduttore non subisca variazioni dimensionali, la resistenza dipenderà solo dalla variazione della temperatura. Sarà pertanto possibile scrivere

$$R - R_0 = R_0 \alpha (T - T_0)$$

Risolviamo rispetto a T, cioè la temperatura finale:

$$T = \frac{R - R_0 + R_0 \alpha T_0}{R_0 \alpha} = \frac{(58 - 50)\,\Omega + 50\,\Omega \times 4.3 \cdot 10^{-3}\,K^{-1} \times 293\,K}{50\,\Omega \times 4.3 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}} = 330\,K = 57^{\circ}$$

Esercizio 208. Trovare la temperatura alla quale la resistenza di un conduttore di rame raddoppierebbe rispetto a una temperatura di 20.0 °C.

Soluzione. La variazione della resistività varia linearmente con la variazione della temperatura, $\Delta\rho = \rho_0 \alpha \Delta T$. Essendo la resistività direttamente proporzionale alla resistenza, si può supporre che anche la variazione della resistenza vari linearmente al variare della temperatura. Supponendo che sezione e lunghezza del conduttore rimangano invariati, se la resistenza raddoppia, allora la resistività raddoppia, per cui $\rho = 2\rho_0$ e $\Delta\rho = \rho_0$. Da ciò segue che

$$1 = \alpha \Delta T = \alpha (T - 293^{\circ})$$

da cui

$$T = \frac{1}{\alpha} + 293 = \frac{1}{4.3 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}} + 293 = 526\,K = 253\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Esercizio 209. Un grosso bruco, lungo $4.00\,cm$, striscia nel verso della deriva degli elettroni lungo una barretta di rame, avente un diametro di $5.2\,mm$, in cui scorre una corrente di $12\,A$. Determinare la differenza di potenziale tra i due estremi del bruco; stabilire se la sua coda è positiva o negativa, in confronto alla testa; Calcolare il tempo impiegato dal bruco per percorrere una distanza di $1.0\,cm$ viaggiando di pari passo con lo spostamento di deriva degli elettroni nel cavo.

Soluzione. Per un tratto di rame lungo quanto il bruco la differenza di potenziale sarà

$$\Delta V = iR = i\rho \frac{l}{A} = 12\,A \times 1.69 \cdot 10^{-8}\,\Omega m \times \frac{0.04\,m}{\pi \left(2.6 \cdot 10^{-3}\right)^2 m^2} = 3.8 \cdot 10^{-4}\,V$$

Il bruco è disposto lungo il verso della deriva, cioè dal polo negativo al positivo; pertanto la coda dovrà essere negativa rispetto alla testa. Per ottenere il tempo di percorrenza è necessario conoscere prima la velocità di deriva, pari a quella del bruco, e il numero di elettroni per unità di volume, n,

$$\frac{n}{N_{Avog}} = \frac{d_{ensità}}{M_{molare}}$$

da cui

$$n = \frac{6.02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1} \times 9.0 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}}{64 \times 10^{-3}\,\frac{kg}{mol}} = 8.5 \cdot 10^{28}\,\frac{elettroni}{m^3}$$

Calcoliamo ora la velocità di deriva

$$v_{der} = \frac{i}{nAe} = \frac{12\,A}{8.5 \cdot 10^{28}\,\frac{elettroni}{m^3} \times \pi \left(2.6 \cdot 10^{-3}\right)^2 m^2 \times 1.60 \cdot 10^{-19}\,C} = 4.2 \cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s}$$

Calcoliamo ora il tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{1.0 \cdot 10^{-2}\,m}{4.2 \cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s}} = 241\,s$$

Esercizio 210. Un cavo ha una resistenza R. Trovare la resistenza di un secondo filo dello stesso materiale, di lunghezza e diametro dimezzati.

Soluzione. Se il materiale è lo stesso per entrambi i fili, allora la resistività è la stessa. Pertanto la resistenza è direttamente proporzionale alla lunghezza del filo e inversamente proporzionale alla sua sezione. Il rapporto $\frac{l}{A}$ diverrà

$$\frac{\frac{l}{2}}{\frac{\pi r^2}{4}}=\frac{2l}{\pi r^2}=2\frac{l}{A}=2R$$

La resistenza del secondo filo sarà pertanto doppia di quella del primo.

Esercizio 211. Due conduttori sono realizzati con lo stesso materiale ed hanno la stessa lunghezza. Il conduttore A è un cavo pieno di diametro $1.0\,mm$. Il conduttore B è un tubo cavo di diametro esterno pari a $2.00\,mm$ e diametro interno di $1.00\,mm$. Trovare il rapporto delle resistenze $\frac{R_A}{R_B}$ osservato tra gli estremi dei due conduttori.

Soluzione. I due conduttori hanno resistenze che si differenziano solo per l'area della loro sezione. Calcoliamo, pertanto, queste aree ricorrendo alla semplice geometria (nel caso B si tratta di trovare l'area di una corona circolare)

$$\begin{aligned} A_A &= 0.25\pi \\ A_B &= \pi\,(1.0-0.25)=0.75\pi \end{aligned}$$

Il rapporto tra le resistenze è uguale al rapporto tra l'area del conduttore B e quella del conduttore A.

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{A_B}{A_A}=\frac{0.75}{0.25}=3.0$$

Esercizio 212. Su un cavo di rame e su un cavo di ferro di uguale lunghezza viene applicata la stessa differenza di potenziale agli estremi. Trovare il rapporto dei loro raggi perché la corrente sia la stessa. Verificare se con un'oculata scelta dei raggi è possibile ottenere una densità di corrente uguale.

Soluzione. La corrente che circola in un conduttore è data da $i=\frac{\Delta V}{R}=\frac{A\Delta V}{\rho l}$. Se la lunghezza dei cavi è la stessa così come la differenza di potenziale, allora la corrente sarà la stessa se

$$i=\frac{\pi R_{Cu}^2\Delta V}{\rho_{Cu}l}=\frac{\pi R_{Fe}^2\Delta V}{\rho_{Fe}l}$$

cioè

$$\frac{R_{Cu}}{R_{Fe}}=\sqrt{\frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Fe}}}=\sqrt{\frac{1.69\cdot10^{-8}\,\Omega m}{9.68\cdot10^{-8}\,\Omega m}}=0.42$$

La densità di corrente è espressa dal rapporto tra la corrente e la sezione del cavo. Se permangono le stesse condizioni, allora una densità di corrente uguale implica un'area uguale, cioè un rapporto tra i raggi diverso da quello sopra calcolato. Pertanto questa possibilità, a parità di corrente e di differenza di potenziale, non si può verificare.

Esercizio 213. Una bacchetta quadrata di alluminio è lunga $1.3\,m$ e spessa $5.2\,mm$. Trovare la resistenza alle sue estremità. Trovare, inoltre, il diametro di una bacchetta cilindrica di rame avente la stessa lunghezza e resistenza della bacchetta di alluminio.

Soluzione. La resistenza è data da $R=\rho_{Al}\frac{l}{A}$, pertanto

$$R=2.75\cdot10^{-8}\,\Omega m\times\frac{1.3\,m}{\left(5.2\cdot10^{-3}\right)^2 m^2}=1.32\cdot10^{-3}\,\Omega$$

Per la bacchetta di rame, di sezione circolare, avremo un diametro di

$$d=2\sqrt{\frac{\rho_{Cu}l}{R\pi}}=2\sqrt{\frac{1.69\cdot10^{-8}\,\Omega m\times1.3\,m}{\pi\times1.32\cdot10^{-3}\,\Omega}}=4.60\,mm$$

Esercizio 214. Una bacchetta cilindrica di un certo metallo è lunga $1.60\,m$ e ha un diametro di $5.50\,mm$. La resistenza tra i suoi due estremi (a $20°C$) vale $1.09\cdot10^{-3}\,\Omega$. Trovare il materiale. Un disco viene costruito con questo stesso materiale e ha un diametro di $2.00\,cm$ e uno spessore di $1.00\,mm$. Trovare la sua resistenza tra le due facce circolari opposte, assumendo che esse siano superfici equipotenziali.

Soluzione. La resistenza è data da

$$R=\rho\frac{l}{A}$$

per conoscere il tipo di materiale è necessario ricavare il valore della resistività

$$\rho=\frac{AR}{l}=\frac{\pi\left(2.75\cdot 10^{-3}\,m\right)^2\times 1.09\cdot 10^{-3}\,\Omega}{1.60\,m}=1.62\cdot 10^{-8}\,\Omega m$$

la bacchetta è pertanto di argento. Il disco di argento ricavato con le misure indicate avrà una resistenza

$$R=\rho\frac{l}{A}=1.62\cdot 10^{-8}\,\Omega m\frac{1.00\cdot 10^{-3}\,m}{\pi\times\left(1.00\cdot 10^{-2}\right)^2\,m^2}=5.16\cdot 10^{-8}\,\Omega$$

Esercizio 215. Un cavo elettrico è costituito da 125 fili sottili, ciascuno con una resistenza di $2.65\,\mu\Omega$. Ai terminali di ciascuno filo viene applicata la stessa differenza di potenziale che genera una corrente totale di $0.750\,A$. Trovare la corrente in ciascun filo e la differenza di potenziale applicata; trovare, infine, la resistenza del cavo.

Soluzione. La corrente in ciascuno filo è ottenibile da

$$i_n=\frac{0.750\,A}{125}=6.00\,mA$$

La differenza applicata è la stessa ai terminali di ogni filo per cui

$$\Delta V=iR=6.00\cdot 10^{-3}\,A\times 2.65\cdot 10^{-6}\,\Omega=1.59\cdot 10^{-8}\,V$$

Conoscendo la corrente totale e la differenza di potenziale, si può calcolare la resistenza

$$R=\frac{V}{i}=\frac{1.59\cdot 10^{-8}\,V}{0.750\,A}=2.12\cdot 10^{-8}\,\Omega$$

si può osservare che la resistenza complessiva è data dal valore della resistenza di ogni singolo filo diviso per il loro numero.

Esercizio 216. Quando si applica una tensione di $115\,V$ su un cavo di lunghezza pari a $10\,m$ e di diametro pari a $0.30\,mm$, la densità di corrente è di $1.4\cdot 10^4\,\frac{A}{m^2}$. Trovare la resistività del cavo.

Soluzione. La densità di corrente è data dal rapporto tra la corrente e la sezione del cavo. Quest'ultima è uguale a

$$A=\pi r^2=\pi\times 2.25\cdot 10^{-8}\,m^2$$

La corrente sarà

$$i=JA=1.4\cdot 10^4\,\frac{Amp}{m^2}\times\pi\times 2.25\cdot 10^{-8}\,m^2=9.90\cdot 10^{-4}\,A$$

Il cavo avrà quindi una resistenza pari a

$$R=\frac{V}{i}=\frac{115\,V}{9.90\cdot 10^{-4}\,A}=1.16\cdot 10^5\,\Omega$$

La resistività varrà pertanto

$$\rho=\frac{RA}{l}=\frac{1.16\cdot 10^5\,\Omega\times\pi\times 2.25\cdot 10^{-8}\,m^2}{10\,m}=8.21\cdot 10^{-4}\,\Omega m$$

Esercizio 217. Una comune lampadina per lampeggiatore viene alimentata in condizioni operative da una tensione di $2.9\,V$ e una corrente di $0.30\,A$. Se la resistenza del filamento è pari, a temperatura di $20°C$ a $1.1\,\Omega$, trovare la temperatura del filamento di tungtseno quando la lampadina viene accesa.

Soluzione. La variazione della resistenza e dovuta alla variazione della resistività che è una funzione lineare della variazione di temperatura

$$\rho-\rho_0=\rho_0\alpha\left(T-T_0\right)$$

Essendo la resistenza direttamente proporzionale alla resistività, tale relazione può essere scritta anche introducendo la resistenza invece della resistività, cioè

$$R-R_0=R_0\alpha\left(T-T_0\right)$$

In condizioni operative la lampadina avrà una resistenza

$$R=\frac{V}{i}=\frac{2.9\,V}{0.30\,A}=9.7\,\Omega$$

Se la resistenza a temperatura ambiente è di $1.1\,\Omega$, allora la temperatura in condizioni operative sarà

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{R_0\alpha} = 20^\circ\,C + \frac{(9.7 - 1.1)\ \Omega}{1.1\,\Omega \times 4.5 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}} = 20 + 1737 = 1.8 \cdot 10^{3\circ}C$$

Esercizio 218. Un blocco di materiale a forma rettangolare piena, ha una sezione normale di $3.50\,cm^2$, una lunghezza di $15.8\,cm$ e una resistenza di $935\,\Omega$. Il materiale di cui è costituito il blocco ha $5.33 \cdot 10^{22}$ elettroni di conduzione/m^3. Tra i suoi estremi si mantiene una differenza di potenziale di $35.8\,V$. Determinare la corrente nel blocco; assumendo che la densità di corrente sia uniforme, trovarne il valore; calcolare, infine, la velocità di deriva degli elettroni di conduzione e il campo elettrico nel blocco.

Soluzione. Noti differenza di potenziale e resistenza, possiamo calcolare la corrente che circola al suo interno

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{35.8\,V}{935\,\Omega} = 3.83 \cdot 10^{-2}\,A$$

Calcoliamo ora il valore della densità di corrente, supposta uniforme

$$J = \frac{i}{A} = \frac{3.83 \cdot 10^{-2}\,A}{3.50 \cdot 10^{-4}\,m^2} = 109\,\frac{A}{m^2}$$

La velocità di deriva è espressa da

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{109\,\frac{A}{m^2}}{(5.33 \cdot 10^{22}\ \times 1.60 \cdot 10^{-19})\ \frac{C}{m^3}} = 1.28 \cdot 10^{-2}\,\frac{m}{s}$$

Per calcolare il campo elettrico, ricordiamo che esso può essere definito come la variazione della differenza di potenziale con la distanza, cioè, $E = \frac{\Delta V}{\Delta l}$, dove l descrive l'intervallo di distanze pari alla lunghezza del blocco.

$$E = \frac{\Delta V}{l} = \frac{35.8\,V}{0.158\,m} = 227\,\frac{V}{m}$$

Esercizio 219. Per costruire una linea di trasmissione ad alta tensione che deve trasportare una corrente di $60.0\,A$ si prendono in considerazione il rame e l'alluminio. La resistenza per unità di lunghezza deve essere $0.150\,\frac{\Omega}{km}$. Calcolare, per ciascuno dei due materiali la densità di corrente e la massa di $1.00\,m$ di cavo ($d_{Cu} = 8900\,\frac{kg}{m^3}$; $d_{Al} = 2700\,\frac{kg}{m^3}$).

Soluzione. Essendo $R = \rho\frac{l}{A}$, si ha $\frac{R}{l} = \frac{\rho}{A}$, da cui

$$A = \frac{\rho l}{R}$$

Inoltre, nel nostro caso $\frac{R}{l} = 0.150\,\frac{\Omega}{km} = 0.150 \cdot 10^{-3}\,\frac{\Omega}{m}$. Avremo quindi

$$A_{Cu} = \frac{1.69 \cdot 10^{-8}\,\Omega m}{0.150 \cdot 10^{-3}\,\frac{\Omega}{m}} = 1.13 \cdot 10^{-4}\,m^2$$
$$A_{Al} = \frac{2.75 \cdot 10^{-8}\,\Omega m}{0.150 \cdot 10^{-3}\,\frac{\Omega}{m}} = 1.83 \cdot 10^{-4}\,m^2$$

Avremo quindi

$$J_{Cu} = \frac{60.0\,A}{1.13 \cdot 10^{-4}} = 5.31 \cdot 10^5\,\frac{A}{m^2}$$
$$J_{Al} = \frac{60.0\,Am}{1.83 \cdot 10^{-4}\,m^2} = 3.28 \cdot 10^5\,\frac{A}{m^2}$$

Supposta costante la sezione del cavo, la massa del cavo, immaginato come un sottile cilindro alto $1.00\,m$, sarà

$$m_{Cu} = dV = 8900\,\frac{kg}{m^3} \times 1.13 \cdot 10^{-4}\ m^2 \times 1\,m = 1.01\,kg$$
$$m_{Al} = dV = 2700\,\frac{kg}{m^3} \times 1.83 \cdot 10^{-4}\,m^2 \times 1\,m = 0.494\,kg$$

Esercizio 220. Nella bassa atmosfera della terra ci sono ioni negativi e positivi, prodotti dagli elementi radioattivi del suolo e dai raggi cosmici. In una certa regione, l'intensità del campo elettrico atmosferico è di $120\,\frac{V}{m}$, in direzione verticale verso il basso. Per effetto di questo campo gli ioni positivi, 620 per cm^3, con una singola carica in eccesso, si spostano verso il basso ed quelli negativi, 550 per cm^3, anch'essi con una singola carica in eccesso, si spostano verso l'alto. Il valore misurato della conducibilità è $2.70 \cdot 10^{-14}\,\frac{Siemens}{m}$. Calcolare la velocità di deriva degli ioni, assunta uguale per quelli positivi e negativi e la densità di corrente.

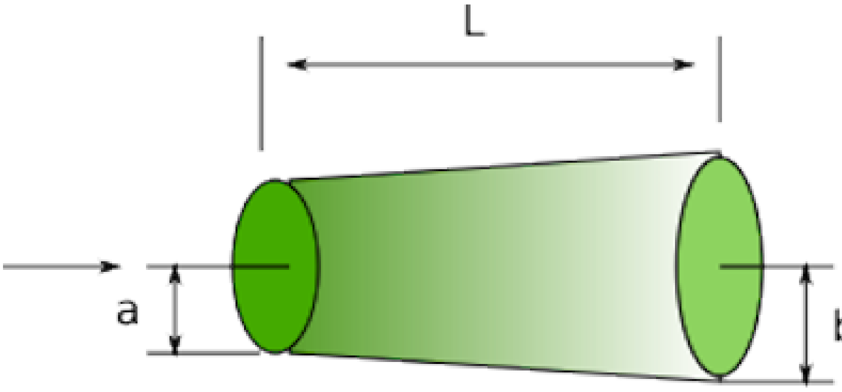
Soluzione. La velocità di deriva è data dal rapporto tra la densità di corrente e la densità di carica ne. Inizialmente, la densità di corrente non è nota, per cui la sostituiremo con il prodotto tra la conducibilità e il campo elettrico $J = \sigma E$.

$$v_d = \frac{\sigma E}{ne} = \frac{2.70 \cdot 10^{-14}\, \frac{Siemens}{m} \times 120\, \frac{V}{m}}{1170 \cdot 10^{9}\, m^{-3} \times 1.60 \cdot 10^{-19}} = 1.73 \cdot 10^{-5}\, \frac{m}{s}$$

La densità di corrente sarà invece

$$J = \sigma E = 2.70 \cdot 10^{-14}\, \frac{Siemens}{m} \times 120\, \frac{V}{m} = 3.24 \cdot 10^{-12}\, \frac{A}{m^2}$$

Esercizio 221. Una resistenza ha la forma di un tronco di cono circolare. I raggi delle basi sono a e b, e l'altezza è L. Se l'assottigliamento è lieve, si può assumere che la densità di corrente sia uniforme su una qualunque sezione normale. Calcolare la resistenza di questo oggetto. Si mostri poi che la risposta si riduce a $\rho\frac{L}{A}$ nel caso particolare in cui l'assottigliamento è nullo (cioè $a = b$.



Soluzione. La corrente i ha il verso indicato in figura. Assumendo che la densità di corrente J sia uniforme su una qualunque sezione normale, può essere calcolata dal rapporto $\frac{i}{A}$ dove $A = \pi r^2$ è l'area della sezione in una particolare posizione, che indichiamo con x, $(0 < x < L)$. La direzione di J è la stessa della corrente. Possiamo esprimere, quindi, il campo elettrico in funzione di x per poi ricavare la differenza di potenziale e da questa la resistenza, dalla $R = \frac{V}{i}$. Pertanto,

$$J = \frac{i}{\pi r^2} = \frac{E}{\rho}$$

è necessario, quindi, descrivere la variazione del raggio in funzione di x. Osserviamo che il raggio aumenta linearmente con x e può essere espresso come

$$r = c_1 + c_2 x$$

dove c_1e c_2 sono parametri da determinare. Scegliendo l'origine alla sinistra del tronco di cono, quando $x = 0$, $r = c_1 = a$; analogamente, quando $x = L$, $r = b$ e quindi $c_2 = \frac{b-a}{L}$. La relazione sopra si può riscrivere come

$$r = a + \left(\frac{b-a}{L}\right)x$$

Calcoliamo ora il campo elettrico, sostituendo

$$E = \frac{\rho i}{\pi r^2} = \frac{\rho i}{\pi}\left[a + \left(\frac{b-a}{L}\right)x\right]^{-2}$$

Calcoliamo ora la differenza di potenziale mediante l'integrale di E lungo la distanza x

$$V = -\int_0^L E dx = -\frac{\rho i}{\pi}\int_0^L \left[a + \left(\frac{b-a}{L}\right)x\right]^{-2} = \frac{\rho i}{\pi}\frac{L}{b-a}\left[a + \left(\frac{b-a}{L}\right)x\right]^{-1}\Bigg|_0^L = \frac{\rho i}{\pi}\frac{L}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{\rho i}{\pi}\frac{L}{b-a}\frac{b-a}{ab} = \frac{\rho i}{\pi a}$$

[per risolvere l'integrale si considera $a + \left(\frac{b-a}{L}\right)x$ come la variabile, per cui $d\left(a + \left(\frac{b-a}{L}\right)x\right) = dx \cdot \frac{b-a}{L}$]. La resistenza è ora

$$R = \frac{V}{i} = \frac{\frac{\rho i L}{\pi ab}}{i} = \frac{\rho L}{\pi ab}$$

Se $a = b$ è facile osservare che $b - a = a^2$, dove a può essere considerato il raggio del cilindro che si forma, e quindi $R = \frac{\rho L}{A}$.

17. La Potenza

Esercizio 222. Uno studente tiene accesa la sua radio portatile da $9.0\,V$, consumando $7.0\,W$, dalle 9 di sera fino alle 2 di notte. Trovare la quantità di carica passata nei fili.

Soluzione. La potenza, misurata in Watt, cioè $\frac{Joule}{sec}$ è data dal prodotto della differenza di potenziale per la corrente che circola nei fili. Pertanto

$$P = iV$$

da cui

$$i = \frac{P}{V} = \frac{7.0\,W}{9.0\,V} = 0.78\,A$$

Ogni secondo circola, quindi, una corrente di $0.78\,A$. La radio rimane accesa per 5 ore, cioè per $18000\,s$. Avremo

$$q = it = 0.78 \times 18000 = 1.4 \cdot 10^4\,C$$

Esercizio 223. Un tubo a raggi X opera a una corrente di $7.0\,mA$ e a una differenza di potenziale di $80\,kV$. Trovare la potenza dissipata in watt.

Soluzione. L'esercizio è elementare e richiede soltanto di ricordare la relazione che lega la potenza alla tensione e alla corrente e di utilizzare correttamente le unità di misura.

$$P = iV = 7.0 \cdot 10^{-3}\,A \times 80 \cdot 10^3\,V = 560\,W$$

Esercizio 224. L'energia termica che viene dissipata in una resistenza ha un valore di $100\,W$ quando la corrente è di $3.00\,A$. Determinare la resistenza.

Soluzione. Nel circuito la quantità di carica che si muove è associata ad una diminuzione della differenza di potenziale con conseguente diminuzione dell'energia potenziale. Per la legge di conservazione dell'energia, tale diminuzione è accompagnata da una trasformazione in altre forme, in questo caso in energia termica, a causa della resistenza totale del circuito. Pertanto, l'energia termica può essere associata alla potenza dissipata dal circuito, per cui, supponendo valida la legge di Ohm:

$$P = iV = i^2 R$$

da cui

$$R = \frac{P}{i^2} = \frac{100\,W}{9.00\,A^2} = 11.1\,\Omega$$

Esercizio 225. Le luci di un'automobile in moto assorbono $10\,A$ dall'alternatore a $12\,V$, che è azionato dal motore. Si assuma che l'alternatore abbia un rendimento dell'80% (la sua potenza elettrica in uscita è pari all'80% della potenza meccanica in entrata) e si calcoli la potenza che il motore deve fornire per alimentare le luci.

Soluzione. La potenza necessaria per alimentare le luci è

$$P = iV = 10\,A \times 12\,V = 120\,W$$

Se l'alternatore ha un rendimento dell'80%, allora il motore dovrà erogare

$$P_{mot} = 120\,W \times \frac{100}{80} = 150\,W$$

Esercizio 226. Una stufa elettrica alimentata da una linea a $220\,V$, ha una resistenza incandescente di $14.0\,\Omega$. Trovare la potenza elettrica dissipata sotto forma di calore; A $150\,\frac{Lire}{KWh}$, trovare il costo necessario al funzionamento della stufa per $5.00\,h$.

Soluzione. La potenza dissipata è data da:

$$P = iV = \frac{V^2}{R} = \frac{220^2\,V^2}{14.0\,\Omega} = 3.46 \cdot 10^3\,W = 3.46\,kW$$

Se ogni kW ha il costo indicato per $1\,h$, allora il costo sarà

$$Costo = 3.46\,kW \times 5\,h \times 150\,\frac{Lire}{kWh} = 2600\,Lire$$

Esercizio 227. Una differenza di potenziale di $220\,V$ viene applicata a una stufa elettrica che dissipa $500\,W$ durante il suo funzionamento. Trovare la sua resistenza durante il funzionamento; determinare il numero di elettroni che passano attraverso una sezione dell'elemento riscaldante.

Soluzione. Noti la differenza di potenziale e la potenza dissipata, è possibile ottenere direttamente la resistenza, risolvendo la $P = \frac{V^2}{R}$ rispetto a R:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2\,V^2}{500\,W} = 96.8\,\Omega$$

Calcoliamo ora la corrente che circola

$$i = \frac{V}{R} = \frac{220\,V}{96.8\,\Omega} = 2.27\,A$$

La carica che passa ogni secondo attraverso una sezione della resistenza è

$$q = it = 2.27\,A \times 1\,s = 2.27\,C$$

Nota la carica dell'elettrone, possiamo ricavarne il numero

$$n_{el} = \frac{2.27\,C}{1.60 \cdot 10^{-19}\,C} = 1.42 \cdot 10^{19}$$

Esercizio 228. Una resistenza qualsiasi viene connessa ai morsetti di una batteria da $3.00\,V$. La potenza dissipata dalla resistenza è di $0.540\,W$. La stessa resistenza è poi collegata ai morsetti di una batteria da $1.50\,V$. Trovare la potenza dissipata in questo secondo caso.

Soluzione. Risolviamo questo esercizio usando in modo un poco più ■intenso■ il linguaggio matematico. Applicando le formule che collegano tra loro potenza, resistenza e differenza di potenziale:

$$R = \frac{V_2}{P}$$

Ora, detta P_1 la potenza nel secondo caso, avremo (la resistenza rimane invariata)

$$P_1 = \frac{\left(\frac{V}{2}\right)^2}{R} = \frac{\left(\frac{V}{2}\right)^2}{\frac{V}{P}^2} = \frac{V^2}{4} \times \frac{P}{V^2} = \frac{P}{4} = \frac{0.540\,W}{4} = 0.135\,W$$

Si può risolvere anche più rapidamente, osservando che la potenza è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale, per cui, se la differenza di potenziale dimezza, la potenza diviene un quarta di quella iniziale.

Esercizio 229. Una differenza di potenziale V viene viene applicata a un filo avente sezione di area A, lunghezza L e resistività ρ. Si vuole variare la differenza di potenziale applicata e allungare il cavo affinché la potenza dissipata venga aumentata di un fattore 30 e la corrente venga aumentata di un fattore 4. Trovare i nuovi valori della lunghezza e dell'area della sezione del filo.

Soluzione. Le relazioni indicate possono essere così sintetizzate:

$$P_1 = 30P \qquad i_1 = 4i$$

Se $P = iV = i^2R = i^2\rho\frac{L}{A}$, allora

$$P_1 = i_1^2\rho\left(\frac{L}{A}\right)_1$$

da cui

$$\left(\frac{L}{A}\right)_1 = \frac{P_1}{i_1^2\rho} = \frac{30P}{16i^2\rho} = \frac{30}{16}\left(\frac{L}{A}\right)$$

Da cui si ricava che

$$\left(\frac{L}{A}\right)_1 = 1.875\frac{L}{A}$$

Avremo quindi

$$L_1 = \sqrt{1.875} = 1.369L \qquad A_1 = \sqrt{\frac{1}{18.75}} = 0.730A$$

Esercizio 230. Una resistenza cilindrica avente raggio di $5.0\,mm$ e lunghezza $2.0\,cm$ viene fabbricata con un materiale che ha una resistività di $3.5 \cdot 10^{-5}\,\Omega m$. Trovare la densità di corrente e la differenza di potenziale quando la dissipazione di potenza nella resistenza è di $1.0\,W$.

Soluzione. La densità di corrente è il rapporto tra la corrente circolante e l'area della sezione della resistenza. Calcoliamo il valore di R:

$$R = \rho\frac{L}{A} = 3.5 \cdot 10^{-5}\,\Omega m \times \frac{2.0 \cdot 10^{-2}\,m}{\pi\left(5.0 \cdot 10^{-3}\,m\right)^2} = 8.9 \cdot 10^{-3}\,\Omega$$

Se la potenza dissipata è pari a $1.0\,W$, avremo da $P = i^2R = J^2A^2R$,

$$J = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{P}{R}} = \frac{1}{\pi\left(5.0 \cdot 10^{-3}\,m\right)^2}\sqrt{\frac{1.0\,W}{8.9 \cdot 10^{-3}\,\Omega}} = 1.3 \cdot 10^5\,\frac{Amp}{m^2}$$

La differenza di potenziale può essere ottenuta da $P = iV = \frac{V^2}{R}$

$$V = \sqrt{PR} = \sqrt{1.0\,W \times 8.9 \cdot 10^{-3}\,\Omega} = 9.4 \cdot 10^{-2}\,V$$

Esercizio 231. Un elemento riscaldante viene fatto funzionare mantenendo una differenza di potenziale di $75.0\,V$ su un cavo di nichel-cromo avente una sezione di $2.60 \cdot 10^{-6}\,m^2$e una resistività di $5.00 \cdot 10^{-7}\,\Omega m$. Se l'elemento dissipa $5000\,W$, trovare la lunghezza del cavo; Se una differenza di potenziale di $100\,V$ viene utilizzata per ottenere la stessa in uscita, trovare la lunghezza dell'elemento.

Soluzione. Nota la potenza dissipata e la differenza di potenziale è possibile ottenere la resistenza dell'elemento e anche la corrente che in esso circola. Da $P = iV = \frac{V^2}{R} = i^2R$

$$R = \tfrac{V^2}{P} = \tfrac{75.0^2\,V^2}{5000\,W} = 1.13\,\Omega$$

Nota la resistenza, possiamo trovare la lunghezza del cavo. Da $R = \rho\frac{L}{A}$, si ha

$$L = \frac{RA}{\rho} = \frac{1.13\,\Omega \times 2.60 \cdot 10^{-6}\,m^2}{5.00 \cdot 10^{-7}\,\Omega m} = 5.88\,m$$

La tensione di $100\,V$ è pari ai $\frac{4}{3}$ della tensione precedente, per cui, dalla prima formula, la resistenza è pari ai $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ di quella precedente e quindi la lunghezza

$$L_1 = \frac{16}{9}L = 10.4\,m$$

Esercizio 232. Una lampadina da $100\,W$ viene alimentata da una tensione di $120\,V$. Calcolare il costo per lasciare accesa la lampadina per un mese (si assuma un costo per l'energia elettrica pari a $140\,\frac{Lire}{kWh}$. Trovare la resistenza della lampadina e la corrente che in essa circola.

Soluzione. La lampadina dissipa una potenza pari a $0.1\,kW$. In un mese ci sono $\Delta t = 24\,\frac{h}{day} \times 30\,day = 720\,h$. Pertanto il costo sarà pari a:

$$costo = 720\,h \times 0.100\,kW \times 140\,\frac{Lire}{kWh} = 10080\,Lire$$

La lampadina in funzione ha una resistenza di

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{120^2\,V^2}{100\,W} = 144\,\Omega$$

e in essa circola una corrente:

$$i = \frac{P}{V} = \frac{100\,W}{120\,V} = 0.833\,A$$

Esercizio 233. Una stufa elettrica da $1250\,W$ viene costruita per essere alimentata a $220\,V$. Trovare la corrente nella stufa e la resistenza della spirale riscaldante. Determinare poi l'energia termica prodotta in $1.0\,h$ dalla stufa.

Soluzione. Nota la tensione e la potenza assorbita, calcoliamo la corrente e la resistenza

$$\begin{array}{r}i=\frac{P}{V}=\frac{1250\,W}{220\,V}=5.68\,A\\ R=\frac{V^2}{P}=\frac{220^2\,V^2}{1250\,W}=38.7\,\Omega\end{array}$$

L'energia termica si ottiene in conseguenza della diminuzione della energia potenziale elettrica.

$$\Delta E_t=P\Delta t=1250\,W\times 3600\,sec=4.50\cdot 10^6\,J$$

Esercizio 234. Un acceleratore lineare produce un fascio di elettroni. La corrente dell'impulso vale $0.50\,A$ e la durata dell'impulso è di $0.10\,\mu s$. (a) Trovare il numero di elettroni accelerati per ogni impulso. (b) Determinare la corrente media per ogni per una macchina operante a $500\,{}^{\text{impulsi}}/_{\text{sec}}$.

Soluzione. La corrente è formata dagli elettroni, particelle negative di carica $e=1.60\cdot 10^{-19}\,C$. La corrente è uguale al rapporto tra la carica e l'intervallo di tempo nel quale essa attraversa una sezione. Pertanto

$$q=i\Delta t=0.50\,A\times 0.10\cdot 10^{-6}\,s=5.0\cdot 10^{-8}\,C$$

Nota la carica è possibile ottenere il numero degli elettroni

$$n_e=\frac{5.0\cdot 10^{-8}\,C}{1.60\cdot 10^{-19}\,C}=3.1\cdot 10^{11}\,elettroni$$

Se l'acceleratore opera in modo da produrre $500\,{}^{\text{impulsi}}/_{\text{sec}}$ allora la corrente media sarà

$$i=500\,\frac{impulsi}{sec}\times 5.0\cdot 10^{-8}\,C=2.5\cdot 10^{-5}\,A=25\,\mu A$$

L'energia acquisita dagli elettroni è pari a

$$K=50\,MeV\times 1.602\cdot 10^{-13}\,\frac{J}{MeV}=8.01\cdot 10^{-12}\,J$$

Se in un secondo si hanno 500 impulsi, allora

$$P_{med}=500\,\frac{impulsi}{sec}\times 3.1\cdot 10^{11}\,elettroni\times 8.01\cdot 10^{-12}\,J=1242\,W$$

Esercizio 235. Un avvolgimento di filo di nichelcromo viene immerso nel liquido contenuto in un calorimetro. Quando la differenza di potenziale applicata è pari a $12\,V$ e la corrente pari a $5.2\,A$, il liquido bolle, evaporando in ragione di $21\,\frac{mg}{s}$. Calcolare il calore di vaporizzazione del liquido in $\frac{J}{kg}$.

Soluzione. La potenza fornita che si trasforma in energia termica è

$$P=iV=5.2\,A\times 12\,V=62.4\,W$$

Ciò significa che il liquido assorbe $62.4\,J$ di calore ogni secondo. Ricordando la relazione che contiene il calore latente, $Q=Lm$, dove è il calore di vaporizzazione e m la massa del liquido, si ha

$$L=\frac{Q}{m}=\frac{62.4\,J}{21\cdot 10^{-6}\,kg}=3.0\cdot 10^6\,\frac{J}{kg}$$

Esercizio 236. Un avvolgimento resistivo, collegato a una batteria esterna, viene posto all'interno di un cilindro adiabatico riempito di gas ideale e dotato di un pistone senza attriti. Una corrente di $i=240\,mA$ scorre nell'avvolgimento, che ha resistenza di $550\,\Omega$. Trovare la velocità v alla quale il pistone di massa $m=12\,kg$, deve essere innalzato affinché la temperatura del gas resti invariata.

Soluzione. Determiniamo la potenza dissipata nel cilindro.

$$P = i^2 R = \left(240 \cdot 10^{-3}\right)^2 \times 550\,\Omega = 31.7\,W$$

Se il cilindro è adiabatico, non vi è scambio di calore tra il sistema cilindro e l'esterno. La trasformazione in questione è isoterma e ciò implica che la variazione dell'energia interna, che è una funzione di stato dipendente dalla temperatura, sia nulla. La prima legge della termodinamica diviene $Q = L$. Ma il lavoro produce un'espansione del gas e quindi un innalzamento del pistone. Il lavoro è, per definizione, uguale al prodotto della forza (in questo caso la pressione del gas) per lo spostamento, cioè $L = F\Delta s = Fvt$. Il pistone ha una massa pari a $12\,kg$ e, quindi, diventa importante tenere conto della gravità che tende a farlo ricadere in basso. Le forze che agiscono sono, pertanto, la pressione verso l'alto e la gravità verso il basso. Tradotto, utilizzando la seconda legge di Newton, si h

$$F - mg = ma$$

Supponiamo, però, che il moto sia rettilineo e uniforme, cioè con accelerazione nulla, $a = 0$. La relazione diviene

$$F = mg$$

e il lavoro diviene

$$L = mgvt$$

Ma il lavoro è pari alla potenza dissipata nel tempo, per cui

$$Pt = mgvt$$

risolvendo rispetto a v, si ha

$$v = \frac{Pt}{mgt} = \frac{P}{mg} = \frac{31.7\,W}{12\,kg \times 9.81\,\frac{m}{s^2}} = 0.27\,\frac{m}{s} = 27\,cm$$